

Fachhochschule Joanneum, Graz

# GRUNDLAGEN FÜR DAS BANK- UND VERSICHERUNGSMANAGEMENT

**Skriptum zur Vorbereitung auf  
das Auswahlverfahren für das Master-Studium**

**BANK- UND VERSICHERUNGSMANAGEMENT**

**der Fachhochschule Joanneum, Graz**

Für das Selbststudium konzipiert von  
**Dr. Volkmar Lautscham & Dr. Roland Mestel**

**Institut für  
Bank- und Versicherungswirtschaft**

**FH | JOANNEUM**  
Bank- und  
Versicherungswirtschaft

*Stand: März 2015, Version 2.0*

# Vorbereitende Bemerkungen

Das Master-Studium *Bank- und Versicherungsmanagement* der Fachhochschule Joanneum zielt darauf ab, Studierenden eine vertiefte und steuerungsorientierte Betrachtung des Bank- bzw. Versicherungsgeschäfts, verbunden mit dem Training von Management- und Führungskompetenzen, anzubieten. Dabei werden wesentliche Vertriebs-, Risiko-, Controlling- und Steuerungsthemen breit abgedeckt, um ein ganzheitliches Verständnis des jeweiligen Sektors zu ermöglichen und einen soliden Grundstein für anspruchsvolle Fach- und Führungsfunktionen innerhalb einer Finanzinstitution zu legen.

Der Zugang zum berufsbegleitenden Master-Studium *Bank- und Versicherungswirtschaft* ist bewusst offen gestaltet, um auch Interessierte mit fachfremdem Grundstudium zu motivieren, ihre bank- bzw. versicherungswirtschaftlichen Kenntnisse zu vertiefen. Die offene Zugangsregelung soll auch zur Vielfalt der Studierenden-Gruppe beitragen. Im Speziellen sollen Personen, die (1) beruflich für eine Finanzinstitution tätig sind oder großes bank- bzw. versicherungswirtschaftliches Interesse zeigen, und (2) über einen Bachelor- oder äquivalenten höheren Abschluss verfügen, angesprochen werden.

Da das Nachholen einzelner fachspezifischer Lehrveranstaltungen für Quereinsteiger/innen bewusst nicht als Aufnahmekriterium gewählt wurde, soll durch die Bereitstellung des vorliegenden Grundlagenkriptums und seine Verwendung im Auswahlverfahren sichergestellt werden, dass Master-Studierende bereits gut vorbereitet ins Studium starten und eine gute Durchlässigkeit während des Studiums gewährleistet ist.

Zum einen soll das vorliegende Skriptum als kompaktes Nachschlagewerk zu Grundlagen während des Masterstudiums dienen. Zum anderen und um sicherzustellen, dass Studierende relevantes, vorausgesetztes Wissen in wesentlichen Zügen abdecken, erfolgt die Reihung der Bewerber/innen in einem Auswahlverfahren. Der schriftliche Teil dieses Auswahlverfahrens ('schriftlicher Aufnahmetest') basiert auf den in diesem Skriptum behandelten Inhalten. Das Skriptum ist für das *Selbststudium* konzipiert. Absolvent/innen des Bachelorstudiums Bank- und Versicherungswirtschaft der Fachhochschule Joanneum werden in diesem Skriptum eine kompakte Zusammenfassung wichtiger Inhalte ihres Bachelorstudiums wiederfinden.

**WICHTIG:** auch Interessent/innen am Master-Studium, die es zeitlich nicht schaffen, das gesamte Skriptum vor dem schriftlichen Aufnahmetest durchzuarbeiten, sollen ermutigt werden, am Aufnahmetest trotzdem teilzunehmen. Die Kenntnis der Inhalte des Skriptums ist kein hartes Aufnahmekriterium, sondern dient im Rahmen des Auswahlverfahrens der Reihung der Kandidat/innen.



Insgesamt wird das Ergebnis des schriftlichen Aufnahmetests mit einer Gewichtung von 40% bei der Reihung der Kandidat/innen berücksichtigt. Andere Reihungskriterien sind (a) die Bewertung der Kandidat/innen im Rahmen eines persönlichen Aufnahmegespräch (20%), (b) die Relevanz und Gesamtbeurteilung der vorangegangenen Ausbildung (10%) und (c) der Nachweis und das Ausmaß relevanter beruflicher Tätigkeit (30%).

Die Inhalte in diesem Skriptum sind in die folgenden Kapitel unterteilt: (a) Quantitative Methoden, (b) Applied Economics (auf Englisch), (c) Ausgewählte Finanz- bzw. Versicherungsprodukte, (d) Ausgewählte Grundlagen der Bank- bzw. Versicherungsbetriebslehre, und (e) Ausgewählte rechtliche Grundlagen für das Bank- bzw.

Versicherungsgeschäft. Die Teilgebiete werden beim schriftlichen Aufnahmetest wie folgt gewichtet:

(2) Quantitative Methoden	20%,
(3) Applied Economics	20%,
(4) Ausgewählte Finanz- bzw. Versicherungsprodukte	24%,
(5) Ausgewählte Grundlagen der Bank- bzw. Versicherungsbetriebslehre	24%,
(6) Ausgewählte rechtliche Grundlagen für das Bank- bzw. Versicherungsgeschäft	12%.

Jedes Kapitel ist weiter in Teilbereiche gegliedert. Jeder Teilbereich ist dann folgendermaßen strukturiert:

- **Relevante Fragen für das Auswahlverfahren:** Fragen, wie sie in ähnlicher Form im schriftlichen Aufnahmetest zu finden sein werden, sind vorab in Kapitel 1 ('Fragenkatalog') zusammengefasst. Es empfiehlt sich, vorab diese Fragen anzusehen und durchzuarbeiten, und sich dann bei der weiteren Vorbereitung auf jene Inhalte zu konzentrieren, für die man die Fragen nicht oder nur unsicher beantworten konnte. Zu jeder Frage ist eine Referenz zum entsprechenden Lerninhalt ('LI') im Skriptum angegeben. Die Logik bei den Fragen, wie sie auch beim schriftlichen Aufnahmetest zur Anwendung gelangt, ist dabei wie folgt: sind 3 Antwortmöglichkeiten gegeben, so ist nur eine Antwort korrekt. Sind 4 Antwortmöglichkeiten gegeben, so können eine, zwei, drei oder vier Antwort/en korrekt sein.
- **Lerninhalte (LI):** die Inhalte sind in Blöcken organisiert. Eine oder mehrere Fragen leiten einen Lerninhalt (mit 'LI' markiert, durchnummeriert) ein. Die Fragen werden je nach Inhalt verbal, quantitativ und/oder graphisch beantwortet. Lerninhalts-Blöcke umfassen eine halbe bis eine Seite, sodass Inhalte in kompakten 'Portionen' erarbeitet werden. Technische Erklärungen, die das Verständnis unterstützen können, aber nicht im Rahmen des schriftlichen Auswahlverfahrens abgefragt werden, sind **blau** hinterlegt und mit dem Symbol  markiert.
- **Beispiele:** Lerninhalte werden meist durch Beispiele illustriert (grau hinterlegt, mit dem Symbol  markiert und durchnummeriert). Eine Aufgabenstellung ist jeweils ausformuliert und wird im darauffolgenden Lösungsteil gelöst. Es wird dem/der Leser/in empfohlen, zuerst die Antwort abzudecken und zu versuchen, die Aufgaben mit Hilfe des davor erarbeiteten Lerninhalts eigenständig zu lösen, und erst dann die vorgeschlagene Lösung durchzuarbeiten.
- Die **Frage-Antwort-Struktur** erleichtert es, sich auf die wesentlichen Inhalte zu konzentrieren.
- Am Ende jedes Teilbereichs sind (a) Referenzen und weiterführende Literaturvorschläge angegeben. Jedes Kapitel schließt (b) mit einer Auflistung des Erlernten (**Check-Liste**) ab.

Wir haben wesentlich Zeit und Mühe in die Erstellung dieses Grundlagentextes investiert. Besonderer Dank gilt auch Nadine Weiß vom Institut für Bank- und Versicherungswirtschaft, die in der Finalisierungsphase von Version 1.0 des Skriptums wertvolle Hilfestellung geleistet hat. Wir hoffen, dass die Leser/inn/en Freude am Wiederholen bekannter und Erarbeiten neuer Inhalte haben, und vielleicht auch Zusammenhänge erkennen, derer sie sich vor der Lektüre noch nicht bewusst waren.

Wir wünschen den Leser/innen viel Erfolg beim Auswahlverfahren für das Master-Studium *Bank- und Versicherungsmanagement* an der FH Joanneum.

V. Lautscham und R. Mestel

*Institut für Bank und Versicherungswirtschaft  
der Fachhochschule Joanneum  
Graz, im März 2015*

Anmerkung: aufgrund der leichteren Lesbarkeit wird in der Folge meist auf die geschlechtsneutrale Form verzichtet; die männliche Schreibform schließt immer auch die weibliche Form mit ein, und umgekehrt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Fragenkatalog für das Auswahlverfahren 2015</b>	<b>3</b>
1.1	Quantitative Methoden . . . . .	4
1.1.1	Multiple-Choice Questions . . . . .	4
1.2	Applied Economics . . . . .	9
1.2.1	Multiple-Choice Questions . . . . .	9
1.2.2	Open-Answer Questions . . . . .	13
1.3	Ausgewählte Finanz- bzw. Versicherungsprodukte . . . . .	14
1.3.1	Multiple-Choice Fragen . . . . .	14
1.3.2	Offene Fragen . . . . .	17
1.4	Ausgewählte Grundlagen der Bank- bzw. Versicherungsbetriebslehre . . . . .	18
1.4.1	Multiple-Choice Fragen . . . . .	18
1.4.2	Offene Fragen . . . . .	23
1.5	Ausgewählte rechtliche Grundlagen für das Bank- bzw. Versicherungsgeschäft . . . . .	24
1.5.1	Multiple-Choice Fragen . . . . .	24
1.5.2	Offene Fragen . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Quantitative Methoden</b>	<b>27</b>
2.1	Mathematische Grundtechniken . . . . .	27
2.2	Funktionen . . . . .	32
2.2.1	Differentialrechnung und lokale Extrema . . . . .	42
2.2.2	Integralrechnung . . . . .	47
2.3	Lineare Gleichungssysteme und Matrizen . . . . .	51
2.4	Grundideen der Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	55
2.4.1	Diskrete Verteilungen . . . . .	65
2.4.2	Stetige Verteilungen, das Gesetz der großen Zahlen . . . . .	69
2.5	Referenzen und weiterführende Literatur . . . . .	77
2.6	Zusammenfassung des Kapitels . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Applied Economics</b>	<b>79</b>
3.1	Microeconomic Concepts . . . . .	80
3.2	Macroeconomic Concepts . . . . .	90
3.3	Monetary and Fiscal Policy . . . . .	100
3.4	Literature and References . . . . .	112
3.5	Chapter Summary . . . . .	112

<b>4</b>	<b>Ausgewählte Finanz- bzw. Versicherungsprodukte</b>	<b>115</b>
4.1	Ausgewählte Finanzprodukte . . . . .	115
4.1.1	Klassische Bankprodukte: Einlagen und Kredite . . . . .	115
4.1.2	Geld- und Kapitalmarktprodukte, Derivate . . . . .	122
4.2	Ausgewählte Versicherungsprodukte . . . . .	135
4.2.1	Schaden- und Unfallversicherung . . . . .	137
4.2.2	Lebens- und Krankenversicherung . . . . .	142
4.3	Referenzen und weiterführende Literatur . . . . .	149
4.4	Zusammenfassung des Kapitels . . . . .	150
<b>5</b>	<b>Ausgewählte Grundlagen der Bank- bzw. Versicherungsbetriebslehre</b>	<b>153</b>
5.1	Bankbetriebslehre . . . . .	153
5.2	Versicherungsbetriebslehre . . . . .	161
5.2.1	Zusatzthemen Versicherung: Asymmetrische Information, Adverse Selektion, Moral Hazard . . . . .	171
5.3	Referenzen und weiterführende Literatur . . . . .	174
5.4	Zusammenfassung des Kapitels . . . . .	175
<b>6</b>	<b>Ausgewählte rechtliche Grundlagen für das Bank- bzw. Versicherungsgeschäft</b>	<b>177</b>
6.1	Das österreichische Rechtssystem . . . . .	177
6.2	Unternehmens- und Insolvenzrecht . . . . .	180
6.3	Banken- und Versicherungsrecht . . . . .	186
6.4	Referenzen und weiterführende Literatur . . . . .	189
6.5	Zusammenfassung des Kapitels . . . . .	190
<b>A</b>	<b>Ergänzungen</b>	<b>191</b>
A.1	Lösungen zu den Multiple-Choice Fragen . . . . .	191
A.1.1	Quantitative Methoden . . . . .	191
A.1.2	Applied Economics . . . . .	191
A.1.3	Ausgewählte Finanz- bzw. Versicherungsprodukte . . . . .	191
A.1.4	Ausgewählte Grundlagen der Bank- bzw. Versicherungsbetriebslehre . . . . .	191
A.1.5	Ausgew. rechtliche Grundlagen für das Bank- bzw. Versicherungsgeschäft . . . . .	192
A.2	Statistische Daten . . . . .	192
A.2.1	Prämienvolumen der globalen Versicherungswirtschaft . . . . .	192
A.2.2	Sterbetafel Österreich 2010/2012 . . . . .	192
A.3	Verteilungsfunktion der Normalverteilung . . . . .	192
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>200</b>



# Kapitel 1

## Fragenkatalog für das Auswahlverfahren 2015

### Inhalte und Lernziele

Die folgenden Fragen dienen zur Vorbereitung auf das Auswahlverfahren. Wichtige Inhalte der Kapitel 2 bis 6 sind hier kompakt in Form von (a) Multiple-Choice Fragen und (b) offenen Fragen zusammengefasst. Die Gewichtung der Kapitel im schriftlichen Auswahlverfahren ist wie folgt festgelegt:

- (2) Quantitative Methoden und (3) Applied Economics: **je 20%**,
- (4) Finanz- und Versicherungsprodukte und (5) Bank- und Versicherungsbetriebslehre: **je 24%** und
- (6) Rechtliche Grundlagen: **12%**.

**Wichtig:** die im Auswahlverfahren gestellten Fragen können sich von den hier präsentierten Fragen unterscheiden (d.h. konkrete Rechenbeispiele können sich auf andere Zahlen beziehen, Fragestellungen können leicht abgeändert sein, Antwortmöglichkeiten können verändert sein). **Aber:** kann man alle Fragen hier beantworten und die Antworten begründen, so ist man gut auf den schriftlichen Teil des Auswahlverfahrens vorbereitet. Es empfiehlt sich, die Inhalte jener Fragen, die man nicht aus dem Stehgreif beantworten kann, an entsprechender Stelle im Skriptum nachzulesen (siehe die jeweiligen Lerninhalte ('LI') bei den einzelnen Fragen).

Die Logik bei den Fragen, wie sie auch beim schriftlichen Aufnahmetest zur Anwendung gelangt, ist dabei wie folgt: sind 3 Antwortmöglichkeiten gegeben, so ist nur eine Antwort korrekt. Sind 4 Antwortmöglichkeiten gegeben, so können eine, zwei, drei oder vier Antwort/en korrekt sein. Die Antworten auf die Multiple Choice-Fragen sind im Appendix, in den Abschnitten A.1.1 bis A.1.5, angegeben.

## 1.1 Quantitative Methoden

### 1.1.1 Multiple-Choice Questions

1. Welche der folgenden Mengen sind **diskret**?  LI 1, 3.

(a)   $\{1; \pi; 6,7\}$

(b)  die Menge der reellen Zahlen,  $\mathbb{R}$

(c)  die Menge der ganzen Zahlen,  $\mathbb{Z}$

(d)   $(0; 3) \setminus [1; 2]$

2. Welche Zahl entspricht dem folgenden Bruchausdruck?  LI 2.

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{4}}{\frac{37}{10}}$$

(a)  3

(b)   $1/3$

(c)   $2516/600$

3. Was ist das Ergebnis, wenn man die ersten 60 Zahlen aufaddiert, d.h.  $1 + 2 + 3 + \dots + 60$  (es handelt sich um eine *arithmetische Reihe*)?  LI 4.

(a)  1.275

(b)  1.830

(c)  3.660

4. Eine Zahlung von €1.000 zum Ende des  $k$ -ten Jahres wird mit dem Abzinsungsfaktor  $\frac{1}{1,05^k}$  multipliziert (d.h. abgezinst) um den *Barwert* der Zahlung zu erhalten. Berechne den Barwert des Zahlungsstroms (a)  $s_{10}$ , bei dem man heute (Ende: Jahr 0), und zum Ende des ersten bis 10. Jahres jeweils €1.000 bzw. (b)  $s$ , bei dem man heute (Ende: Jahr 0), und zum Ende jedes folgenden Jahres bis in alle Ewigkeit jeweils €1.000 ausbezahlt bekommt. Die Barwerte  $s_n$  und  $s$  kann man als *geometrische Reihen* berechnen:  LI 5.

(a)   $s_n = \text{€}8.109$

(b)   $s_n = \text{€}8.722$

(c)   $s = \text{€}21.000$

(d)   $s = \text{€}20.000$

5. Betrachte die *quadratische Gleichung*  $2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 4 = 0$ . Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?  LI 6.

(a)   $x_1 = -2$  ist eine Lösung, die Gleichung hat nur eine reelle Lösung

(b)   $x_1 = 1$  ist eine Lösung, die Gleichung hat nur eine reelle Lösung

(c)   $x_1 = 2$  ist eine Lösung, die Gleichung hat 2 reelle Lösungen

(d)   $x_1 = -1$  ist eine Lösung, die Gleichung hat 2 reelle Lösungen

6. Welche Konstruktionen sind *Funktionen* im mathematischen Sinn?  LI 7,10.

(a)   $f(x) = 3 \cdot x + 2, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(b)   $g(1) = 2, g(2) = 2, g(3) = 2, g(4) = 2, g: \{1; 2; 3; 4\} \rightarrow \{2; 3; 4\}$

(c)   $h(x) = \ln(x), h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(d)   $h(x) = e^x, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

7. Gegeben seien die drei Funktionen  $f(x) = 3 \cdot x - 2$ ,  $g(x) = |x - 2|$  und  $h(x) = -x^2 + 3 \cdot x$  (alle  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Berechne  $f(g(h(-2)))$ ).  LI 7.

(a)  34

(b)  -70

(c)  10



8. Welche der folgenden Funktionen fällt unter die Definition einer *Polynomfunktion* (alle  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )?  LI 9.
- (a)   $f(x) = x^2 - 2x + x^{-1}$  (b)   $g(x) = 3$   
 (c)   $h(x) = (e^x)^2 - e^x$  (d)   $i(x) = (x - 3) \cdot (x + 2)$
9. Welche der folgenden Aussagen treffen bezüglich der *Logarithmusfunktion*  $\ln(x)$  und der *Exponentialfunktion*  $e^x$  zu?  LI 10,11.
- (a)   $\ln(x)$  ist für  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. (b)   $e^x$  nimmt nur positive Werte an  
 (c)   $\ln(e^x \cdot e^y) = x + y$  (d)   $e^x$  ist streng monoton steigend auf  $\mathbb{R}$  und stetig
10. Eine Kontoeinlage wird quartalsweise verzinst und der *nominelle Zinssatz* beträgt  $r_{\text{nom}} = 0,06$  p.a. Welche Aussagen treffen bezüglich des äquivalenten stetigen Zinssatzes  $r_c$  und des effektiven Zinssatzes  $r_{\text{eff}}$  zu?  LI 12.
- (a)   $r_{\text{eff}} = 0,06$  (b)   $r_{\text{eff}} \approx 0,0614$   
 (c)   $r_c \approx 0,061$  (d)   $r_c \approx 0,0642$
11. Betrachte zwei differenzierbare Funktionen  $u(x) = e^x + 3$  und  $v(x) = x^3 - x^2$ . Welche der folgenden Aussagen treffen zu?  LI 16,17,18.
- (a)   $(u(x) + v(x))' = e^x + 3x^2 - 2x$  (b)   $(4 \cdot v(x))' = 4 \cdot v'(x)$   
 (c)   $(u(x) \cdot v(x))' = e^x(x^3 - x^2) + (e^x + 3) \cdot (3x^2 - 2x)$  (d)   $(u(v(x)))' = e^{x^3 - x^2} \cdot (3x^2 - 2x)$
12. Welche der folgenden Aussagen treffen für eine (zweimal differenzierbare) Funktion  $f(x)$  bezüglich des Punktes  $x = x_0$  zu?  LI 19,20.
- (a)  Nimmt  $f(x)$  in  $x_0$  ein lokales Maximum an, so gilt auch  $f'(x_0) = 0$  (b)  Gilt  $f'(x_0) = 0$  so nimmt  $f(x)$  in  $x_0$  immer ein lokales Maximum oder Minimum an  
 (c)   $f'(x_0)$  gibt die Steigung der Tangente an  $f(x)$  im Punkt  $x = x_0$  an (d)  Ist  $f(x)$  im Punkt  $x = x_0$  streng monoton fallend, so gilt  $f'(x_0) > 0$
13. Ein Unternehmen kann zwischen 0 und 1,000 Stück eines Artikels verkaufen. Die nachgefragte (bzw. verkaufte) Menge  $n(p)$  richtet sich dabei nach dem Preis  $p$  mit  $n(p) = 1000 - 0,2 \cdot p$ . Wie soll das Unternehmen den Preis  $p^*$  festsetzen, um die *Erträge*  $n(p) \cdot p$  aus dem Verkauf des Artikels zu *maximieren*?  LI 18,20.
- (a)   $p^* = 0,01$  (b)   $p^* = 400$   
 (c)   $p^* = 2,500$
14. Gegeben sei eine stetige Funktion  $f(x)$  mit Stammfunktion  $F(x)$ . Welche der folgenden Aussagen treffen zu?  LI 21,22.
- (a)   $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$  (b)   $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$   
 (c)   $\int_a^b f(x)dx$  gibt die Fläche zwischen der  $x$ -Achse und  $f(x)$  im Bereich  $[a; b]$  an, aber nur wenn  $f(x)$  auf  $[a; b]$  positiv ist (d)   $\int_a^b f(x)dx$  gibt die Fläche zwischen der  $x$ -Achse und  $f(x)$  im Bereich  $[a; b]$  an

15. Berechne die Fläche  $A$  zwischen der Funktion  $f(x) = 9 - 3 \cdot x$  und der  $x$ -Achse im Bereich  $x \in [-3; 6]$ . Es gilt (Angaben in Einheiten<sup>2</sup>):  LI 21,23.

(a)   $A = 40,5$

(b)   $A = 67,5$

(c)   $A = 135$

16. Welche der folgenden Integrationsregeln sind korrekt ( $c$  ist jeweils eine Konstante)?  LI 23.

(a)   $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

(b)   $\int x^4 dx = 4 \cdot x^3 + c$

(c)   $\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + c$  für  $x > 0$

(d)   $\int e^x + x^4 dx = \int e^x dx + \int x^4 dx$

17. Das Gleichungssystem (I)  $x + 3y = 4$  und (II)  $-2x - 6y = 2$  hat für  $x, y \in \mathbb{R}$ :  LI 24,25.

(a)  keine Lösung

(b)  genau eine Lösung

(c)  unendlich viele Lösungen

18. Was ist die Lösung des Gleichungssystems (I)  $2x + 3y = 4$  und (II)  $-x - y = -1$ ?  LI 25.

(a)   $x = 3, y = -2$

(b)   $x = -2, y = 3$

(c)   $x = 1, y = -2$

(d)   $x = -1, y = 2$

19. Die folgende Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt:  LI 26.

(a)  keine zulässige Matrix

(b)   $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(c)   $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d)  eine  $4 \times 4$  Matrix

20.  $\Omega$  sei der Grundraum eines Wahrscheinlichkeitsexperiments, und  $A$  sei ein Ereignis. Dann gilt:  LI 28,29,30.

(a)   $A$  ist stets in  $\Omega$  enthalten

(b)   $\Omega$  besitzt stets nur endlich viele Elemente

(c)  Ist  $A$  ein sicheres Ereignis, so gilt  $A = \Omega$

(d)  Das Gegenereignis  $\Omega \setminus A$  ist wieder in  $\Omega$  enthalten

21. Wir werfen zwei (faire) Würfeln. Wie groß ist die (Laplace-)Wahrscheinlichkeit  $P(A)$ , dass wir zwei gerade Zahlen werfen?  LI 32.
- (a)   $P(A) = 1/2$  (b)   $P(A) = 1/3$   
 (c)   $P(A) = 8/36$  (d)   $P(A) = 1/4$
22. Wir werfen zwei Münzen und markieren sie (erste Münze, zweite Münze). Das erste Ereignis  $E_1$  sei 'beide Münzen zeigen dasselbe' und  $E_2$  sei 'die erste Münze zeigt Kopf'. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?  LI 33,36.
- (a)   $E_1$  und  $E_2$  sind unabhängig und  $\mathbb{P}[E_1|E_2] = 1/2$ . (b)   $E_1$  und  $E_2$  sind unabhängig und  $\mathbb{P}[E_1|E_2] = 1/4$ .  
 (c)   $E_1$  und  $E_2$  sind abhängig und  $\mathbb{P}[E_1|E_2] = 1/2$ . (d)   $E_1$  und  $E_2$  sind abhängig und  $\mathbb{P}[E_1|E_2] = 1/4$ .
23. Ein medizinischer Test produziert ein positives Ergebnis (d.h. Antikörper werden im Blut entdeckt). Die getestete Krankheit ist selten und tritt nur bei 5% der Bevölkerung auf. Wird ein Kranker getestet so ergibt der Test in 95% der Fällen ein positives Ergebnis, im Fall einer gesunden getesteten Person ergibt der Test in 5% der Fällen ein (falsches) positives Ergebnis. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die getestete Person trotz des positiven Ergebnisses trotzdem gesund ist?  LI 35.
- (a)   $\mathbb{P}[\text{gesund}|\text{pos. Ergebnis}] = 0,05$  (b)   $\mathbb{P}[\text{gesund}|\text{pos. Ergebnis}] = 0,198$   
 (c)   $\mathbb{P}[\text{gesund}|\text{pos. Ergebnis}] = 0,5$  (d)   $\mathbb{P}[\text{gesund}|\text{pos. Ergebnis}] = 0,95$
24. Wir werfen zwei Würfel und definieren die Zufallsvariable  $Z$  als die Summe der Augen beider Würfel. Die Wahrscheinlichkeit, dass  $Z$  nicht größer als 5 ist, ist...  LI 37.
- (a)   $1/6$  (b)   $10/36$   
 (c)   $1/3$  (d)   $13/36$
25.  $X$  sei eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F_X(x)$ . Welche der folgenden Aussagen gelten?  LI 38,39.
- (a)   $\mathbb{P}[X < \infty] = 1$  (b)  Für  $a < b$  gilt immer  $F_X(b) \geq F_X(a)$   
 (c)  Ist  $X$  eine diskrete Zufallsvariable, so existiert  $F_X(x)$  nicht (d)   $\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$  gilt immer
26. Für eine diskrete Zufallsvariable  $X$  gilt  $\mathbb{P}[X = 2] = 0,2$ ,  $\mathbb{P}[X = 3] = 0,2$  und  $\mathbb{P}[X = 5] = 0,6$ . Wie lautet der Erwartungswert  $\mathbb{E}[X]$ ?  LI 41.
- (a)   $\mathbb{E}[X] = 3,4$  (b)   $\mathbb{E}[X] = 4$   
 (c)   $\mathbb{E}[X] = 4,2$
27. Für eine diskrete Zufallsvariable  $X$  gilt  $\mathbb{P}[X = 2] = 0,2$ ,  $\mathbb{P}[X = 3] = 0,2$  und  $\mathbb{P}[X = 5] = 0,6$ . Wie lautet der Standardabweichung  $\sigma(X)$ ?  LI 42.
- (a)   $\sigma(X) \approx 1,26$  (b)   $\sigma(X) \approx 1,74$   
 (c)   $\sigma(X) \approx 2,20$

28.  $X$  und  $Y$  seien zwei Zufallsvariablen mit  $\text{Var}[X] = 4$ ,  $\text{Var}[Y] = 9$  und dem Korrelationskoeffizienten  $\rho_{X,Y} = -0,5$ . Wie groß ist die Varianz der Summe beider Zufallsvariablen,  $\text{Var}[X + Y]$ ?  LI 43.
- (a)  7 (b)  10  
(c)  13 (d)  16
29. An zehn aufeinanderfolgenden Börsetagen (a) steigt der Preis einer Aktie täglich um  $+2\%$  oder (b) er sinkt um  $-1\%$ . Der Preisanstieg an einem bestimmten Tag erfolgt jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $p = 40\%$ , der Preisverfall mit Wahrscheinlichkeit  $1 - p = 60\%$ . Welche der nachfolgenden Zahlen ist der Wahrscheinlichkeit am nächsten, dass der Preis mindestens an 8 der 10 Börsetage steigt?  LI 45.
- (a)  1,2% (b)  3,2%  
(c)  96,8% (d)  98,8%
30. Wieviele Möglichkeiten gibt es, 6 aus den ersten 45 Zahlen gleichzeitig zu ziehen (wie beim Lotto 6 aus 45)?  LI 45.
- (a)   $45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40$  (b)   $\binom{45-6}{6}$   
(c)   $\frac{1}{6!} \binom{45}{6}$  (d)   $\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$
31. Gegeben sei eine Zufallsvariable  $X \sim \text{Binomial}(5; 0,3)$ . Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?  LI 44, 45.
- (a)   $X$  kann als Summe von fünf Bernoulli(0,3)-verteilten Zufallsvariablen beschrieben werden (b)   $\mathbb{E}[X] = 1,5$   
(c)   $\text{Var}[X] = 1,5$  (d)   $\mathbb{P}[X = 0] = 0,3$
32. Gegeben sei eine Zufallsvariable  $X \sim \text{Poisson}(4)$ . Welche der folgenden Aussagen sind dann korrekt?  LI 46.
- (a)   $X$  ist eine stetige Zufallsvariable (b)   $\mathbb{E}[X] = \text{Var}[X]$   
(c)   $\mathbb{P}[X = k] = e^{-4} \cdot 4^k / k!$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$  (d)   $\mathbb{P}[X \geq 0] = 1$
33.  $X$  und  $Y$  seien stetige Zufallsvariablen die beliebige reelle Werte annehmen können,  $X, Y \in \mathbb{R}$ . Die Dichtefunktion seien  $f_X$  (für  $X$ ) und  $f_Y$  (für  $Y$ ).  $F_X(a)$  und  $F_Y(a)$  seien die entsprechenden Verteilungsfunktionen. Dann gilt:  LI 43,47.
- (a)   $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$  (b)   $F_Y(a) = \int_0^a f(z) dz$   
(c)   $F'_X(a) = f(a)$  (d)   $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
34.  $X$  sei eine positive, stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion  $f_X(x) = e^{-x}$  für  $x \geq 0$  und sonst  $f_X(x) = 0$ . Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?  LI 48,50.
- (a)   $X$  ist exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda = 1$  (b)   $\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$   
(c)   $\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 dx$  (d)   $\mathbb{E}[X] = 0$

35.  $X$  ist eine gleichverteilte Zufallsvariable auf  $[0; 1]$  mit Dichtefunktion  $f_X(x)$ . Dann gilt:  LI 49.
- (a)   $f_X(x) = \frac{1}{2}$  für  $0 \leq x \leq 1$       (b)   $\mathbb{E}[X] = 0,5$   
(c)   $\mathbb{P}[X \leq 1] = 1$       (d)   $\mathbb{P}[0,2 \leq X \leq 0,6] = 0,6$
36.  $X$  sei normalverteilt mit Erwartungswert  $\mathbb{E}[X] = \mu = 2$  und Standardabweichung  $\sigma = 1$ . Die Dichtefunktion von  $X$  sei  $f_X(x)$ . Welche der folgenden Aussagen treffen zu?  LI 52,53.
- (a)  Die Dichtefunktion ist symmetrisch      (b)  Je kleiner  $\sigma$ , desto mehr Wahrscheinlichkeitsmasse befindet sich nahe bei  $x = \mu$ .  
(c)  Die Zufallsvariable  $Z = (X - 2)/1$  ist standardnormalverteilt, d.h.  $Z \sim N(0; 1)$       (d)   $\text{Var}[X] = 1$
37.  $X \sim N(3; 2)$  sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 3 und Standardabweichung 2. Gilt  $Z \sim N(0; 1)$ , so schreiben wir  $\mathbb{P}[Z \leq z] = \Phi(z)$ . Welche der folgenden Aussagen trifft zu?  LI 53.
- (a)  Wir schlagen Werte von  $\Phi(z)$  für gegebene  $z$  typischerweise in der (Standard-)Normalverteilungstabelle nach.      (b)  Es gilt  $\Phi(-z) = \Phi(z)$   
(c)  Es gilt  $\mathbb{P}[X \leq 3] = 0,5$       (d)  Es gilt  $\mathbb{P}[X \leq 7] = \Phi(2)$
38. Der Zentrale Grenzwertsatz beschäftigt sich mit der Summe  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  von  $n$  Zufallsvariablen. Welche Aussagen sind korrekt?  LI 54.
- (a)  Als Voraussetzung müssen die  $X_i$  *i.i.d.* sein.      (b)  'i.i.d.' steht für *independent* (unabhängig) and *identically distributed* (folgen der gleichen Verteilung)  
(c)  Für  $n$  sehr groß gilt,  $\mathbb{P}[(S_n - \mathbb{E}[S_n])/\sqrt{\text{Var}[S_n]} \leq z] \approx \Phi(z)$       (d)  Der Satz dient manchmal als Rechtfertigung, um das Risiko eines Portfolios bestehend aus sehr vielen identischen und unabhängigen Einzelrisiken (z.B. Kfz-Versicherungsverträge) normalverteilt zu modellieren.

## 1.2 Applied Economics

### 1.2.1 Multiple-Choice Questions

1. Which of the following statements are true for the demand function of a good that links its demanded quality  $Q_D$  to certain factors  $F_i$ , i.e.  $Q_D = f(F_1, F_2, F_3, \dots)$ ?  LI 55.
- (a)  The market price of the good  $P$  is typically a demand factor.      (b)  The demand function is typically an upward-sloping function in the  $Q - P$ -plane (i.e. when all other factor values are given).  
(c)  For linear demand functions, the coefficient of the price  $P$  is negative for *ordinary goods*.      (d)  Manufacturing costs of the product are often included as factor in the demand function.

2. The demand function for a good is given by

$$Q_D = 12.3 - 0.24 \cdot P + 0.12 \cdot P_s + 1.10 \cdot I$$

where  $Q_D$  is the demanded quantity (in thousand units),  $P$  is the good's price,  $P_s$  is the price of a substitute product and  $I$  is some household income index. What is the maximum quantity of the product that could be sold given that  $P_s = 100$  and  $I = 6$  (in thousand units)?  LI 55.

- (a)  12.3 (b)  24.0  
(c)  30.9

3. Which of the following statements are true for the supply function of a good that links its supplied quality  $Q_S$  to certain factors  $F_i$ , i.e.  $Q_S = f(F_1, F_2, F_3, \dots)$ ?  LI 56.

- (a)  The market price of the good  $P$  is typically a supply factor. (b)  The supply function is typically an upward-sloping function in the  $Q - P$ -plane (i.e. when all other factor values are given)  
(c)  For linear demand functions, the coefficient of the price  $P$  is normally positive (d)  Labour costs (incl. wages) are often included as factor in the supply function

4. The demanded and supplied quantity of a good is given by  $Q_S = 4.4 + 0.30 \cdot P$  and  $Q_D = 12.8 - 0.15 \cdot P$ , respectively, where  $P$  is the price of the good in the market. What is true regarding the equilibrium traded quantity  $Q^*$  and price  $P^*$ ?  LI 57.

- (a)   $(P^*, Q^*)$  is a stable equilibrium (b)   $Q^* = 15$   
(c)   $Q^* = 10$  (d)   $P^* = 18.67$

5. Suppose the demand and supply curve in an open economy have a stable equilibrium  $(Q^*, P^*)$ . Which of the following statements are true regarding price floors or caps as imposed by legislation or the regulator?  LI 59.

- (a)  If a price *cap* is set *above* the equilibrium price  $P^*$ , the good will still be traded at  $P^*$ . (b)  If a price *cap* is set *below* the equilibrium price  $P^*$ , the good will still be traded at  $P^*$ .  
(c)  If a price *floor* is set *above* the equilibrium price  $P^*$ , the good will still be traded at  $P^*$ . (d)  If a price *floor* is set *below* the equilibrium price  $P^*$ , the good will still be traded at  $P^*$ .

6. The points  $A = (10, 12)$  and  $B = (15, 8)$  lie on the demand curve  $(Q_D, P)$ . Which of the following statements are true regarding the price elasticity of demand?  LI 60.

- (a)  The price elasticity of demand from  $A$  to  $B$  is 1.5 (b)  The demand from  $A$  to  $B$  is inelastic  
(c)  The price elasticity of demand from  $A$  to  $B$  is  $-1.5$  (d)  The price elasticity of demand from  $A$  to  $B$  is  $-0.6\dot{6}$

7. Which of the following statements are true for a BMW 1 series car?  LI 61.

- (a)  A Kawasaki motorcycle is a *substitute product*. (b)  Fitting Michelin car tyres are a *complementary product*.  
(c)  An Audi A3 car is a *complementary product*. (d)  A loaf of bread is a *complementary product*.

8. A monopolist can set the price  $P$  for her product as she wishes. The market responds with a demanded quantity of  $Q_D = 10 - P$  (in thousand units). The production costs per product unit are 2. What price  $P^*$  shall she choose to maximise her profit?  LI 63.
- (a)   $P^* = 3$  (b)   $P^* = 6$   
(c)   $P^* = 12$
9. In a market with four suppliers, the market share are split 0.4, 0.3, 0.2, 0.1. What concentration number does the Herfindahl-Hirschman index give for this market?  LI 64.
- (a)   $\text{HHI}(4) = 0.13$  (b)   $\text{HHI}(4) = 0.25$   
(c)   $\text{HHI}(4) = 0.30$  (d)   $\text{HHI}(4) = 1$
10. The production of an economy within a certain period is purchased through consumer spending  $C$ , company spending  $I$  (for investments in inventory and means of production), government spending  $G$  (net of transfer payments to consumers or companies) and foreign buyers  $X$  (exports). Part of the production was imported and amounts to  $M$ . By the expenditure approach, the gross domestic product (GDP) of this economy can then be calculated as:  LI 65.
- (a)   $C + I + G$  (b)   $C + I + G - X + M$   
(c)   $C + I + G + X - M$
11. What is true regarding the various GDP-related terms?  LI 66.
- (a)  The GDP deflator can be used as a measure of price changes between a base year  $t_0$  and year  $t$  (b)  If prices have only gone up since the base year  $t_0$ ,  $\text{real GDP}(t; t_0)$  will be greater than  $\text{nominal GDP}(t)$   
(c)  If prices have only gone up since the base year  $t_0$ ,  $\text{real GDP}(t; t_0)$  will be lower than  $\text{nominal GDP}(t)$  (d)  GDP per capita is always purchasing-power adjusted (PPP)
12. What is true regarding inflation and deflation?  LI 67.
- (a)  High inflation is generally good as it increases price levels, so that imports, and hence production costs, become relatively cheaper (b)  Central banks today aim to target slight deflation, so that price levels fall slightly and purchasing power of wealth rises  
(c)  Austria has not experienced inflation higher than 4% p.a. since 1968 (d)  Inflation is often measured by changes in price indices, such as the CPI.
13. Compute the inflation of an economy over the period  $(t_0; t_1)$  using a Paasche index. The market basket (prices  $p$  and quantities  $q$ ) is comprised as follows:

Item	$p_{t_0}$	$q_{t_0}$	$p_{t_1}$	$q_{t_1}$
Food	12	30	18	32
Energy	4	12	5	20
Clothing	23	5	24	8

LI 67.

- (a)  31.26% (b)  33.95%  
(c)  37.67% (d)  38.12%

14. What statements are true regarding unemployment?  LI 68.
- (a)  *Structural unemployment* occurs due to a mismatch between offered and demanded skills. (b)  *Frictional unemployment* occurs due to the 'natural' time required for searching and securing a new job.
- (c)  *Cyclical unemployment* refers to the fact a greater proportion of the older population is unemployed (i.e. at a later stage of their cycle of life). (d)  EU-wide unemployment was about 15% in early 2014.
15. What is the typical sequence of phases over an economic cycle (or: business cycle)?  LI 70.
- (a)  expansion-recession-through-peak (b)  expansion-through-peak-recession
- (c)  expansion-peak-recession-through (d)  expansion-through-recession-peak
16. Which of the following are typically seen as *leading* economic indicators?  LI 71.
- (a)  Average weekly hours worked (manufacturing) (b)  GDP growth
- (c)  New requests for building permits for private housing (d)  Stock prices
17. Which of the following are typically seen as *lagging* economic indicators?  LI 71.
- (a)  Unemployment rate (b)  Consumer price index
- (c)  Interest rates (d)  Stock prices
18. Regarding fiscal and monetary policy measures, which of the following are true?  LI 72.
- (a)  Lowering taxes = monetary measure (b)  Central banks lending more to banks = Monetary measure
- (c)  Redistributing income through social benefits = Fiscal measure (d)  State-funded construction of new motorways = fiscal measure
19. What is true regarding the money measures M1, M2 and M3?  LI 73.
- (a)   $M1 > M2 > M3$  (b)   $M1 < M2, M2 > M3$
- (c)   $M1 < M2 < M3$  (d)   $M1 < M2, M1 > M3$
20. Which of the following are NOT functions of central banks?  LI 75.
- (a)  Sole supplier of currency (b)  Implementation of fiscal policy
- (c)  The bank of commercial banks (d)  Regulation and supervision of payment systems
21. The ECB's only primary objective is to ensure a year-on-year increase in the Harmonised Index of Consumer Prices for the Euro area of below...  LI 76.
- (a)  -2% (b)  -1%
- (c)  1% (d)  2%



22. Three banks A, B and C participate in a variable-rate tender with ECB's long-term financing operations. The banks bid (amount, interest rate) as follows: A - (23; 1.1%), B - (12; 1.0%) and C - (60; 1.0%). The volume is announced at 73. What bank is allocated how much?  LI 77.
- (a)  A:23, B:12, C:38 (b)  A:17.7, B:9.2, C:46.1  
(c)  A:23,B:0,C:50 (d)  A:23,B:8.3,C:41.7
23. Through the Stability and Growth Pact, the EMU member states (both the 18 Eurozone states and the 10 non-euro states) have agreed to...  LI 81.
- (a)  keep their budget deficits below 3% of GDP. (b)  keep their public debt to GDP ratio below 60%.  
(c)  leave the Eurozone if they do not fulfil the agreed conditions for two consecutive years. (d)  keep new public debt per year at below 8% of GDP.

### 1.2.2 Open-Answer Questions

1. Explain the terms *consumer* and *producer surplus* in an open market economy.  LI 58.
2. Explain how (a) open competition, (b) oligopolies and (c) monopolies typically differ in terms of number of suppliers, barriers of entry, availabilities of substitutes for products and the pricing power of individual suppliers.  LI 62.
3. Explain some of the driving forces behind economic growth. How is economic growth typically measured?  LI 69.
4. Describe what typically happens during an economic (a) expansion or (b) recession, focusing on economic growth, unemployment, consumption, inflation and investment by businesses.  LI 70.
5. Briefly explain how money is created by central and commercial banks. What is the *money multiplier*?  LI 70.
6. Describe with what instruments the ECB aims to influence market interest rates.  LI 77.
7. Explain the *transmission mechanism* of monetary policy, i.e. how economic growth can be encouraged through quantitative easing or lowering interest rates.  LI 78.
8. What are the three main types of fiscal policy measures? Give some examples of how the US government has historically reacted to economic slowdowns/crises by implementing fiscal policy measures.  LI 79,80.

## 1.3 Ausgewählte Finanz- bzw. Versicherungsprodukte

### 1.3.1 Multiple-Choice Fragen

1. Welche der folgenden Aussagen treffen auf des Einlagengeschäft (bzw. Depotgeschäft) der Banken zu?  LI 82.
 

(a) <input type="checkbox"/> Das Einlagengeschäft wird dem <i>Pas-</i> <i>sivgeschäft</i> der Bank zugerechnet.	(b) <input type="checkbox"/> <i>Sichteinlagen</i> dienen dem Sparen, und nicht dem Zahlungsverkehr.
(c) <input type="checkbox"/> Für natürliche Personen schützt die <i>Einlagensicherung</i> in Österreich €100.000 pro Person und Bank.	(d) <input type="checkbox"/> Einlagen machen für (Retail-)Banken meist einen wesentlichen Teil der <i>Bilanzsum-</i> <i>me</i> aus.
  
2. Welche der folgenden Bankkunden dürfen ein *Girokonto* eröffnen?  LI 83.
 

(a) <input type="checkbox"/> Natürliche Personen ab dem begonne- nen 14. Lebensjahr.	(b) <input type="checkbox"/> Gesellschaften mit beschränkter Haf- tung.
(c) <input type="checkbox"/> Gemeinden.	(d) <input type="checkbox"/> Eingetragene Vereine.
  
3. Nach §9 des Verbraucherkreditgesetzes müssen welche der folgenden Angaben in einem Kredit-  
vertrag in jedem Fall gemacht werden?  LI 85.
 

(a) <input type="checkbox"/> Effektiver Zinssatz.	(b) <input type="checkbox"/> Soll- und Verzugszinssatz.
(c) <input type="checkbox"/> Gesamtkreditbetrag.	(d) <input type="checkbox"/> Fälligkeit des Kredits und Rückzah- lungsmodalitäten.
  
4. Ein Kredit von €1.000.000 wird zu 10% p.a. vierteljährlich und nach der ACT/360-Methode  
verzinst. Die Zinszahltag sind der 15. März, 15. Juni, 15. September und 15. Dezember. Welche  
der folgenden Zahlen kommt dem für die Periode 15. September bis 15. Dezember zu zahlenden  
Zins am nächsten?  LI 86.
 

(a) <input type="checkbox"/> €24.932	(b) <input type="checkbox"/> €25.000
(c) <input type="checkbox"/> €25.278	(d) <input type="checkbox"/> €25.556
  
5. Welche der folgenden Aussagen treffen auf sogenannte (Kredit-)Ratings der Ratingagenturen  
zu?  LI 87.
 

(a) <input type="checkbox"/> A ist ein 'investment grade' Rating.	(b) <input type="checkbox"/> AAA ist das bestmögliche Rating der Agenturen S&P's und Fitch.
(c) <input type="checkbox"/> Gemäß Moody's sind für den Zeit- raum 1983 bis 2007 nur etwa 9% der AAA- Schuldnerinnen innerhalb von 10 Jahren aus- gefallen.	(d) <input type="checkbox"/> Historische Ausfallraten können di- rekt als zukünftige Ausfallswahrscheinlich- keiten herangezogen werden.

6. Welche Arten von *Sicherheiten* können von Banken zur Besicherung von Kreditschulden herangezogen werden?  LI 88.
- (a)  Kreditverbindlichkeiten von verbundenen Unternehmen der Schuldnerin gegenüber Dritten. (b)  Hypothekarische Sicherstellungen.
- (c)  Sachsicherheiten (z.B. Flugzeuge, Maschinen, Fahrzeuge). (d)  Banken sind durch die Einlagensicherung gem. §93 BWG gegen Kreditausfälle ihrer Kundinnen abgesichert.
7. Ein Unternehmen ist durch drei Kreditgeber, A, B und C, zu je €10 fremdfinanziert. A finanziert *vorrangig* zu B und C; B und C sind vom Rang *pari passu*. B erhält zusätzlich Sicherheiten. Das Unternehmen meldet Konkurs an und es kommt zu Verwertung der Aktiva. Das Sicherheitspaket für B erzielt €8, alle restlichen Aktiva werden um €16 verkauft. Wem fließt welcher Betrag (in €) im Zuge des Konkurses zu?  LI 88.
- (a)  A bekommt 10. (b)  B bekommt 8.  
(c)  B bekommt 10. (d)  C bekommt 5.
8. Welche Rechte sind mit dem Besitz einer Aktie verbunden?  LI 90.
- (a)  Recht auf mindestens eine Dividende pro Jahr. (b)  Rückzahlung des Nennwerts (nicht des Kaufpreises!) der Aktie im Konkursfall.  
(c)  Vetorecht bei der Jahreshauptversammlung gegen Vorstandsbesetzungen. (d)  Stimmrecht bei Aktionärsversammlungen (z.B. Jahreshauptversammlung)
9. Betrachte das folgende Limit Order Book einer Aktie.

Bid (dt. Geldkurs)			Ask (dt. Briefkurs)		
Käufer	Anzahl	Limitpreis	Verkäufer	Anzahl	Limitpreis
A	8	10	E	12	11
B	15	9	F	5	13
C	16	7	G	20	14

Ein Broker gibt ein MARKET-BUY-Order für 20 Stück in des Tradingsystem ein. Zu welchem Durchschnittspreis erwirbt der Broker die 20 Aktien?  LI 91.

- (a)  9,40. (b)  10,50.  
(c)  11,80. (d)  11,95.
10. Welche der folgenden Aussagen treffen bzgl. *Anleihen* zu?  LI 92.
- (a)  Die Rückzahlung eines Kapitalbetrags (engl. *Principal*) ist grundsätzlich vorgesehen. (b)  Zinszahlungen sind in fixer Höhe zu fixierten Zeitpunkten zu leisten (daher der Name: *Fixed Income*)  
(c)  Eine Anleihenurkunde besteht aus einem Mantel und einem (Kupon-)Bogen. (d)  Im Konkursfall der Emittentin werden Forderungen durch Anleihen vorrangig zu Forderungen der Aktionäre behandelt.

11. Was trifft in Bezug auf die *Laufzeit* der folgenden Staatsanleihenpapiere (der USA und Deutschlands) zu?  LI 93.
- (a)  Schatzbrief:  $\geq 5$  Jahre  
 (b)  T-Bills:  $\leq 1$  Jahr  
 (c)  Bundesanleihen:  $\leq 9$  Jahre  
 (d)  T-Bonds: 2 bis 5 Jahre
12. Die *Yield* (auch: Yield-to-Maturity, kurz: YTM) einer 2-jährigen Anleihe mit einem Nennwert von 100 und einem jährlich-nachschüssigen Kupon von 5% p.a., die zum Laufzeitbeginn zu einem Preis von 94 gehandelt wird, beträgt anfänglich ca.  LI 94.
- (a)  3,14%  
 (b)  5,00%  
 (c)  5,84%  
 (d)  8,38%
13.  $D$  sei die Duration einer Anleihe mit der Ausgangs-Yield  $y_0 = 3\%$  und dem Ausgangs-Preis  $P_0$ . Eine Anleihenanlegerin vermutet, dass die Yield auf 4% steigen wird, sodass sich der Preis der Anleihe auf  $P$  ändert. Sie möchte nun die Duration verwenden, um die relative Preisänderung  $\Delta P/P_0 = (P - P_0)/P_0$  zu schätzen (z.B. approximieren). Welcher der folgenden Vorschläge ist der beste für diese Approximation?  LI 97.
- (a)   $\Delta P/P_0 \approx D$ .  
 (b)   $\Delta P/P_0 \approx -D \cdot 0,03$ .  
 (c)   $\Delta P/P_0 \approx -D \cdot 0,01$ .  
 (d)   $\Delta P/P_0 \approx D/2 \cdot 0,01^2$ .
14.  $F$  sei der Forward-Preis eines Produktes, das zum Zeitpunkt  $t$  einen Preis  $S_t$  hat. In diesem Forward-Vertrag ist ein Liefer- bzw. Zahlungszeitpunkt  $T$  definiert. Welche Aussage trifft nicht zu?  LI 98.
- (a)  Der Käufer des Produkts zum Zeitpunkt  $T$  hält eine *Long*-Position.  
 (b)  Liegt der Preis  $S_T$  über  $F$ , so kauft der Käufer nicht, und der Forward-Vertrag erlischt.  
 (c)  Der Verkäufer hat zum Zeitpunkt  $T$  einen Gewinn/Verlust von  $F - S_T$ .  
 (d)  Wird Cash-Settlement vereinbart, erfolgt anstatt der Lieferung eine Ausgleichszahlung.
15. Ein  $6 \times 12$ -Forward-Rate Agreement mit einem Nennwert von 100.000 vereinbart eine Forward-Rate von 6% p.a. (Zinsberechnungsmethode: 30/360). Der Referenzsatz (Marktzinssatz) zu Beginn der Zinsperiode beträgt 5% p.a. Welche der folgenden Zahlen liegt am nächsten beim Gewinn/Verlust zu Beginn der Zinsperiode aus Sicht des Einlegers?  LI 99.
- (a)  485,4.  
 (b)  487,8.  
 (c)  943,4.  
 (d)  952,4.
16. Welche der folgenden Punkte treffen auf die individuelle *Schadenversicherung* zu?  LI 104.
- (a)  Forderungen Dritter an den Versicherten sind grundsätzlich nicht gedeckt.  
 (b)  Die Versicherung ist meist als *Summenversicherung* strukturiert.  
 (c)  Ein Beispiel ist die Haftpflichtversicherung für Ärzte.  
 (d)  In der Haushaltsversicherung (nach Vorschlag des VVÖ) sind Lawinen- und Hochwasserschäden standardmäßig nicht versichert.

17. Bei der Kalkulation der Prämie, die der Versicherungsnehmer zu entrichten hat, startet man meist mit der *reinen Risikoprämie*. Danach...  LI 105.
- (a)  ...addiert man einen Gewinnzuschlag für das Versicherungsunternehmen.  
 (b)  ...addiert man einen Zuschlag für Verwaltungs- bzw. Betriebskosten.  
 (c)  ...addiert man einen Zuschlag für erwartete Schäden.  
 (d)  ...addiert man einen Zuschlag für Zinsaufwendungen.
18. Eine Versicherung bepreist einen Versicherungsvertrag nach dem Erwartungswertprinzip mit einem Aufschlagsfaktor (engl. *loading factor*) von  $\theta = 0,4$ . Maximal ein Schadensfall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von  $q = 0,1$  ein. Der Schaden beträgt dann entweder 100 mit Wahrscheinlichkeit 0,4, oder 200 mit Wahrscheinlichkeit 0,6. Wie hoch fällt die Prämie aus?  LI 105.
- (a)  6,4.  
 (b)  16,0.  
 (c)  22,4  
 (d)  28,0.
19. Welche der folgenden Aussagen treffen auf die gesetzliche Unfallversicherung in Österreich zu?  LI 108.
- (a)  Die Prämie ist individuell risikoabhängig gestaltet.  
 (b)  Unfälle am (direkten) Weg von der und zur Arbeit sind versichert.  
 (c)  Beahlt generell eine einmalige Kapitalleistung beim Unfalltod des Versicherten.  
 (d)  Im Fall einer Rentenleistung kann die Minderung der Erwerbstätigkeit nachträglich laufend geprüft und die Rente angepasst/gestrichen werden.
20. In einer Sterbetafel sind folgende Angaben zu der Gruppe, der eine ausgewählte (genau) 65-jährige Person angehört, gemacht.

Alter $x$	einjährige Sterbewahrscheinlichkeit $q(x)$
64	0,012
65	0,016
66	0,020
67	0,030

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person noch mehr als 2 Jahre lebt?  LI 111.

- (a)  0,9518.  
 (b)  0,9640.  
 (c)  0,9643.  
 (d)  0,9700.
21. Welche der folgenden Leistungen können im Rahmen privater Krankenversicherungen (u.U. als Zusatz zur Grundversicherung) abgedeckt sein?  LI 113.
- (a)  Krankenhaustaggeld.  
 (b)  Stationärer Aufenthalt in der Sonderklasse.  
 (c)  Rehabilitationsaufenthalte.  
 (d)  Vorsorgeuntersuchungen.

### 1.3.2 Offene Fragen

1. Gib Beispiele an, welche Aspekte eines kreditnehmenden Unternehmens in der *qualitativen* bzw. *quantitativen* Kreditrisikoanalyse in der Regel berücksichtigt werden.  LI 87.

2. Erkläre den Begriff 'Yield Curve'. Wenn wir uns dem Beispiel der Staatsanleihen zuwenden: kann sich die Form von Yield Curves über die Zeit ändern? Was ist eine *normale* Yield Curve? Wie sah die AAA-EUR Yield Curve im Jahr 2008 (nach Beginn der Finanzkrise) aus?  LI 95.
3. Erkläre den Unterschied zwischen Kassa- und Terminmarkt (engl. *Forward Market*). Was ist eine Short- bzw. eine Long-Position in einem Forward-Vertrag mit dem Forward-Preis  $F$ . Welche Vertragspartei bezahlt wieviel, wenn das *Underlying* zum Termin zu einem Preis von  $S_T$  im Markt gehandelt wird?  LI 98.
4. Erkläre die Struktur der (Finanz-)Option. Was sind europäische/amerikanische Optionen, Calls/Puts, Short- und Long-Positionen? Wie wird eine Call- bzw. Put-Option am Verfallstag  $T$  abhängig vom Ausübungspreis  $K$  und dem Preis des Underlyings  $S_T$  abgerechnet?  LI 100.
5. Erkläre die Struktur eines Fixed-for-floating-Zinsswaps. Welche Zahlungen fließen an Abrechnungstagen? Kann der Wert eines Swaps über die Zeit schwanken? Gib ein Beispiel.  LI 101.
6. Erkläre strukturelle Unterschiede zwischen der Individualversicherung und der Sozialversicherung. Wie unterscheidet sich die Prämienberechnung? Welche Produkte werden als Individualversicherung angeboten?  LI 102.
7. Erkläre, warum es sinnvoll sein kann, einen Selbstbehalt des Versicherungsnehmers bei Versicherungsschäden vorzusehen? Gehe auf Interessenskonflikte, den Verwaltungsaufwand des Versicherers und die Signalwirkung bzgl. des Risikos ein.  LI 106.
8. Erkläre die Begriffe Ablebensversicherung, Erlebensversicherung und gemischte Lebensversicherung. Welche Ziele werden oft mit einem Abschluss dieser einzelnen Versicherungsarten verfolgt?  LI 109.
9. Erkläre, welche Faktoren bei der Prämienberechnung (bzw. Auswahl des Tarifmodells) in der Lebensversicherung eine Rolle spielen.  LI 112.
10. Erkläre die Problematik der nachträglichen Prämienanpassung in der privaten Krankenversicherung? Warum kann diese notwendig sein? Ist diese grundsätzlich möglich? Gibt es gesetzliche Einschränkungen?  LI 114.

## 1.4 Ausgewählte Grundlagen der Bank- bzw. Versicherungslehre

### 1.4.1 Multiple-Choice Fragen

1. Welche der folgenden Geschäfte sind *Bankgeschäfte* im Sinn des §1 Bankwesengesetz (BWG)?  LI 115.
 

(a) <input type="checkbox"/> Kreditgeschäfte.	(b) <input type="checkbox"/> Einlagengeschäfte.
(c) <input type="checkbox"/> Devisengeschäfte.	(d) <input type="checkbox"/> Depotgeschäfte.
2. Welche der folgenden Banken(-gruppen) in Österreich zählen zu den *Universalbanken*?  LI 115.
 

(a) <input type="checkbox"/> Österreichische Nationalbank.	(b) <input type="checkbox"/> Bausparkassen (z.B. Wüstenrot).
(c) <input type="checkbox"/> Raiffeisenbanken.	(d) <input type="checkbox"/> (Landes-)Hypothekenbanken.

3. Welche der folgenden sind *direkte volkswirtschaftliche Funktionen* der Banken?  LI 116.
- (a)  Mithilfe bei der Geldschaffung. (b)  Finanzierung von Haushalten und Unternehmen.
- (c)  Kapitalmobilisation durch Transferleistungen. (d)  Abwicklung des Zahlungsverkehrs.
4. Banken haben in der Volkswirtschaft eine sogenannte Fristentransformationsfunktion. Das bedeutet, dass Banken...  LI 116.
- (a)  ...einen Vorschuss auf Zahlungen geben, die erst nach einer Frist in der Zukunft anstehen (z.B. Betriebspension). (b)  ...Kunden vorfinanzieren, z.B. mit einem langfristigen Immobilienkredit, der über zukünftige Zahlungen getilgt wird.
- (c)  ... Geldeinlagen erst nach 2 Tagen am Konto gutschreiben, sodass über diese Frist eine Zinersparnis lukriert wird. (d)  ...z.B. kurzfristige Einlagen erhalten, die sie in langfristige Finanzierungen umwandeln.
5. Welche der folgenden Vorgänge sind dem Begriff des *Kreditrisikos* bzgl. der Bankkunden zuzuordnen?  LI 117.
- (a)  Die Zahlung von fälligen Kreditzinsen wird erst verspätet geleistet. (b)  Ein fixverzinslicher Kredit verliert an Wert, weil die Marktzinsen steigen.
- (c)  Einer Kreditnehmer hält eine fällige Tilgungszahlung zurück, weil er eine Meinungsverschiedenheit mit der Bank hat. (d)  Die Bank kann kurzfristig Einlagen nicht ausbezahlen, weil die Geldmittel in längerfristigen Krediten gebunden sind, und die Kreditnehmer nicht vorzeitig tilgen wollen.
6. Das *Limitsystem* einer Bank beschränkt...  LI 117.
- (a)  die ausstehenden Forderungsbeträge gegenüber einzelnen Kunden, Branchen oder Geographien nach oben (internes Risikomanagement). (b)  den Zinssatz je nach Risikoklasse nach unten, zu dem die Bank bereit ist, Gelder zu verleihen (Eigenkapitalrentabilitäts-Management).
- (c)  die Mindestanforderung (z.B. EBITDA-Marge, Zinsdeckung) an den Kunden, um sich als Kreditnehmer zu qualifizieren.
7. Die größten Positionen auf der Bankbilanz sind in der Regel...  LI 118.
- (a)  Verbindlichkeiten für Einlagen und Forderungen gegen Kreditnehmer. (b)  Forderungen gegen Kreditnehmer und Verbindlichkeiten von Eigenkapitalgebern (seit Basel II).
- (c)  Verbindlichkeiten für Einlagen und Rückstellungen für Kreditausfälle. (d)  Barmittel und Forderungen gegen Kreditnehmer.

8. Regulatorische Eigenkapitalanforderungen für Banken...  LI 119.
- (a)  sind in der EU über Basel II/III geregelt. (b)  sind in der EU über Solvency II geregelt.
- (c)  beinhalten nach Basel II neben einer Komponente für operationelles und Marktrisiko auch eine Kapitalunterlegung von 8% der risikogewichteten Aktiva (nach dem Standardansatz). (d)  berechnen sich nach dem Standardansatz von Basel II als 8% der risikogewichteten Aktiva.
9. Im Sinne des aktiven Risikomanagements eines bestehenden Kreditbuches, kann die Bank welche der folgenden Instrumente verwenden?  LI 120.
- (a)  Verkauf von Krediten an andere Banken (Syndizierung). (b)  Risikotransfer über den Verkauf von Anleihen mittels Verbriefung von Krediten.
- (c)  Absicherung spezifischer Risiken über den Kauf einer Kreditversicherung (z.B. Credit Default Swaps). (d)  Striktere Vergabekriterien bei neuen Kreditvergaben.
10. Eine Bank (EB) hat zwei Einzelkredite ausstehend: Kredit 1 ist eine Forderung über €1.000 und Kredit 2 eine Forderung über €600. Die Bank verkauft Teile dieser Kreditforderungen an eine Partnerbank (PB) wie folgt (mittels Syndizierung): (a) Vertikaler Split, jeweils 40% der Gesamtforderungen gehen an die Partnerbank oder (b) Horizontaler Split, die so entstehende *Junior Tranchen* (vertraglich nachrangig) von je 40% der Gesamtforderung gehen an die Partnerbank. Beide Forderungen vermehren Ausfälle: Kreditforderung 1 wird mit €800 bedient, Kreditforderung 2 mit €200. Welche Bank erleidet welche Verluste?  LI 120.
- (a)  Im Fall (a) verliert EB 360. (b)  Im Fall (b) verliert PB 440.
- (c)  Im Fall (b) verliert EB 200. (d)  Im Fall (a) verliert PB 220.
11. Eine Bank vergibt einen Kredit in Höhe von 100.000 zu einem Zinssatz von 4% pro Jahr. Eine Junior Tranche in der Höhe von 30.000 verkauft sie mittels Syndizierung an eine Partnerbank, die 7% p.a. auf diese Tranche an Zinsen einnehmen möchte. Welcher Zinssatz bleibt der Bank bezogen auf die Größe des restlichen Teils des Kredits (Senior Tranche) nach der Syndizierung?  LI 120.
- (a)  2,71% (b)  3,00%
- (c)  3,16% (d)  4,12%



12. Ein Versicherungsportfolio, bestehend aus  $n$  versicherten Einzelrisiken  $R_i$  (=Zufallsvariable), muss basierend auf (zufällig) auftretenden Schäden Versicherungsleistungen in der Höhe von  $S = R_1 + R_2 + \dots + R_n$  erbringen. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?  LI 123.
- (a)  Die Varianz des Durchschnittschadens  $S/n$  geht für große  $n$  gegen 0, wenn die Einzelrisiken  $R_i$  unabhängig und identische verteilt sind (i.i.d.).
- (b)  Für die Erwartungswerte gilt immer  $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[R_1] + \mathbb{E}[R_2] + \dots + \mathbb{E}[R_n]$ .
- (c)  Sind die Einzelrisiken  $R_i$  unabhängig und identisch verteilt (i.i.d.), so wird  $S$  für genügend großes  $n$  gut von einer *Normalverteilung* approximiert.
- (d)  Für die Varianz gilt immer  $\text{Var}[S] = \text{Var}[R_1] + \text{Var}[R_2] + \dots + \text{Var}[R_n]$ .
13. Ein Versicherungsportfolio besteht aus 10 Versicherungsverträgen, die je ein Einzelrisiko abdecken. Jedes einzelne Risiko  $R_i$  erzeugt mit einer Wahrscheinlichkeit von  $q = 0,1$  einen Schaden von 10, und sonst keinen Schaden. Die Einzelrisiken sind (paarweise) unabhängig voneinander. Wie groß ist die *Varianz pro Anzahl* der Risiken (also:  $\text{Var}[(R_1 + \dots + R_{10})/n]$ ) dieses Portfolios?  LI 123.
- (a)  0,9.
- (b)  1,0.
- (c)  9,0.
- (d)  10,0.
14. Gegeben sei ein Risiko  $L > 0$ , das zu einem Verlust führen kann. Der Value-at-Risk von  $L$  zum 95%-Niveau ist dann...  LI 123.
- (a)  jener Verlust der im Durchschnitt für 95% der Fälle auftritt.
- (b)  jener Verlust, der mit einer (modellierten) 95% Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird.
- (c)  jene Maximalabweichung vom erwarteten Verlust, die für 95% der Fälle nicht überschritten wird.
- (d)   $\mathbb{E}[L] + 1,645 \cdot \sqrt{\text{Var}[L]}$ .
15. Die zwei betragsmäßig größten Positionen auf der Bilanz eines Nicht-Leben-Versicherungsunternehmens sind in der Regel...  LI 124.
- (a)  Investments und technische Rückstellungen.
- (b)  Beitragsüberträge und technische Rückstellungen.
- (c)  Investments und Eigenkapital.
- (d)  aktivierte Abschlusskosten und Eigenkapital.
16. Welche der folgenden Positionen sind auf der Aktivseite (engl. *Assets*) der Bilanz eines Nicht-Leben-Versicherers zu finden.  LI 124.
- (a)  Aktivierte Abschlusskosten.
- (b)  Beitragsüberträge.
- (c)  (Versicherungstechnische) Rückstellungen.
- (d)  Eigenkapital.

17. Eine Säule der Regulierungsrichtlinie Solvency II ist es, sicherzustellen, dass ein Mindestbetrag an Eigenkapital als Sicherheitspolster für die Abdeckung unerwarteter Verluste im Versicherungsunternehmen gehalten wird. Die Berechnung basiert auf dem einjährigen Value-at-Risk in Bezug auf die Schadenshöhe. Dabei sollen Versicherungsleistungen über entsprechende Rückstellungen und Eigenkapital für wieviel % der (modellierten) Fälle abgedeckt sein?  LI 125.
- (a)  99%. (b)  99,5%.  
 (c)  99,9%. (d)  99,95%.
18. Ein Versicherer geht auf ein Portfolio mit 4 Einzelrisiken einen XL-Rückversicherungsvertrag mit einer (Auszahlungs-)Grenze (auch: *Deductible*) von 5 ein. Die Einzelschäden betragen am Ende  $R_1 = 11$ ,  $R_2 = 0$ ,  $R_3 = 5$ ,  $R_4 = 7$ . Welche Zahlung leistet der Rückversicherer unter dem Rückversicherungsvertrag?  LI 126.
- (a)   $S_{RV} = 5$ . (b)   $S_{RV} = 8$ .  
 (c)   $S_{RV} = 11$ . (d)   $S_{RV} = 18$ .
19. Ein Versicherer geht auf ein Portfolio mit 4 Einzelrisiken einen Stop-loss-Rückversicherungsvertrag mit einer (Auszahlungs-)Grenze (auch: *Deductible*) von 5 ein. Die Einzelschäden betragen am Ende  $R_1 = 11$ ,  $R_2 = 0$ ,  $R_3 = 5$ ,  $R_4 = 7$ . Welche Zahlung leistet der Rückversicherer unter dem Rückversicherungsvertrag?  LI 126.
- (a)   $S_{RV} = 5$ . (b)   $S_{RV} = 8$ .  
 (c)   $S_{RV} = 11$ . (d)   $S_{RV} = 18$ .
20. Wir betrachten ein Geschäftsjahr eines Lebensversicherers. Die Schadenaufwendungen betragen 800, die technischen Rückstellungen wurden um 50 nach unten korrigiert, Verwaltungs- und Betriebskosten betragen 100 und auf die Prämien konnten Investitionserträge von 120 erwirtschaftet werden. Der Versicherer hatte zu Beginn des Geschäftsjahres 1.400 an Prämien verrechnet, wobei 40% dieser Prämien Versicherungsschutz über zwei Jahre gewährten, die restlichen Prämien bezogen sich nur auf das aktuelle Geschäftsjahr. Wie hoch ist die *Combined Ratio* für dieses Geschäftsjahr?  LI 127.
- (a)  ca. 65%. (b)  ca. 74%.  
 (c)  ca. 76%. (d)  ca. 84%.
21. Wo kann asymmetrische Information für eine der beteiligten Parteien ein Problem darstellen?  LI 128.
- (a)  Bei der Vergabe eines Kredits. (b)  Beim Abschluss einer Versicherung.  
 (c)  Bei der Neuanmietung einer Wohnung. (d)  Beim Kauf eines Gebrauchtwagens.
22. Welche der folgenden Beispiele können sich auf ex-ante Moral Hazard bezüglich der Wahrscheinlichkeit eines Schadeneintritts beziehen?  LI 130.
- (a)  Reparatur eines Autos nach einem Unfallschaden bei einer befreundeten Werkstatt, die Preise über dem Marktniveau verrechnet.  
 (b)  Schnelles Fahren auf der Autobahn.  
 (c)  Die Nicht-Installation eines Feuermelders.  
 (d)  Die Nicht-Installation einer Alarmanlage.

### 1.4.2 Offene Fragen

1. Welchen Risiken ist eine Bank ausgesetzt? Nenne und definiere einzelne Risikoarten, die im Risikomanagement einer Bank in der Regel berücksichtigt werden.  LI 117.
2. Gib einen groben Überblick über die Inhalte der Basel II-Richtlinie. Gehe dabei auf den 3-Säulen Ansatz ein. Wie werden Eigenkapitalanforderungen nach dem Standardansatz berechnet?  LI 119.
3. Erkläre die Struktur einer Verbriefung von Kreditforderungen. Zeichne ein Strukturdiagramm und erkläre, wie die einzelnen Elemente dabei in Zusammenhang stehen. Warum könnte eine Bank eine Kreditverbriefung in Betracht ziehen?  LI 120.
4. Erkläre die Begriffe *Versicherung* und *Versicherer* (ugs. auch *Versicherung*). Welche Arten von Versicherern gibt es?  LI 121.
5. Welche direkten bzw. indirekten volkswirtschaftlichen Funktionen nimmt der Versicherungssektor ein? Gib jeweils ein kurzes Beispiel an.  LI 122.
6. Erkläre die Begriffe (a) Beitragsüberträge, (b) Rückversicherungsaktiva und (c) aktivierte Abschlusskosten auf der Bilanz eines Nicht-Leben-Versicherungsunternehmens.  LI 124.
7. Gib eine kurze Übersicht über die *Solvency II* Regulierungsvorschriften. Gehe dabei auf den 3-Säulen-Ansatz ein und erkläre wie Eigenkapitalanforderungen berechnet werden.  LI 125.
8. Erkläre drei gängige Rückversicherungsvertragstypen. Besteht ein Portfolio aus Einzelrisiken (also: potenziellen und zufälligen Schadenzahlungen, die als nicht-negative Zufallsvariablen modelliert sind)  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , so entscheide, welchen Teil des (zufälligen) Portfolioschadens  $S$  der Erstversicherer und welchen Teil der Rückversicherer zu tragen hat.  LI 126.
9. Beschreibe das Problem der *adversen Selektion* in Gegenwart asymmetrischer Information. Verwende ein konkretes Beispiel für deine Ausführungen. Wie wird adverser Selektion im Versicherungsbereich entgegengewirkt?  LI 129.

## 1.5 Ausgewählte rechtliche Grundlagen für das Bank- bzw. Versicherungsgeschäft

### 1.5.1 Multiple-Choice Fragen

1. Das Österreichische Rechtssystem baut auf mehreren Stufen auf. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?  LI 131.
 

(a) <input type="checkbox"/> Änderung der <i>Baugesetze</i> bedürfen auch einer einfachen Mehrheit bei einer Volksbefragung.	(b) <input type="checkbox"/> <i>Verordnungen</i> spezifizieren idR Inhalte einfacher Gesetze.
(c) <input type="checkbox"/> <i>EU-Richtlinien</i> sind nur Empfehlungen, die nicht im nationalen Recht abgebildet werden müssen (im Gegensatz zu EU-Verordnungen).	(d) <input type="checkbox"/> Für den Beschluss eines <i>Verfassungsgesetzes</i> müssen mindestens 1/3 der Nationalratsmitglieder anwesend sein, und es muss eine 2/3-Mehrheit der abgegebenen Stimmen erreicht werden.
  
2. In Bezug auf die privatrechtliche Rechtsprechung gibt es in Österreich ein vierstufiges Gerichtssystem. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?  LI 131.
 

(a) <input type="checkbox"/> Die erste Instanz ist immer das <i>Bezirksgericht</i> .	(b) <input type="checkbox"/> Der Verwaltungsgerichtshof ist die dritte und letzte Instanz der privatrechtlichen Rechtsprechung.
(c) <input type="checkbox"/> Unternehmensinsolvenzen werden vom zuständigen <i>Landesgericht</i> bearbeitet.	(d) <input type="checkbox"/> In Österreich gibt es 9 <i>Oberlandesgerichte</i> .
  
3. Generell unterscheidet man das Privatrecht und das öffentliche Recht, wobei das Strafrecht, das eigentlich Teil des öffentlichen Rechts ist, meist separat behandelt wird. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?  LI 132.
 

(a) <input type="checkbox"/> Das <i>Schuldrecht</i> ist Teil des öffentlichen Rechts.	(b) <input type="checkbox"/> Das <i>Sozialrecht</i> ist Teil des Privatrechts.
(c) <input type="checkbox"/> Das <i>UGB</i> wird dem <i>Sonderprivatrecht</i> zugeordnet.	(d) <input type="checkbox"/> Das <i>Sachenrecht</i> ist Teil des Privatrechts.
  
4. Welche der folgenden Rechtsgebiete werden im ABGB behandelt?  LI 132.
 

(a) <input type="checkbox"/> Erbrecht.	(b) <input type="checkbox"/> Schuldrecht.
(c) <input type="checkbox"/> Handelsstand.	(d) <input type="checkbox"/> Strafrecht.
  
5. Das UGB...  LI 133.
 

(a) <input type="checkbox"/> regelt auch den einmaligen Verkauf einer Uhr auf Ebay (d.h. diskreter Handel zwischen Privatpersonen).	(b) <input type="checkbox"/> ist in fünf Bücher gegliedert.
(c) <input type="checkbox"/> behandelt auch Rechnungslegungspflichten von Unternehmen.	(d) <input type="checkbox"/> ist das einzige Gesetzbuch in Österreich, das unternehmerische Tätigkeiten regelt.

6. Die *Prokura*, wie im UGB definiert, ...  LI 133.
- (a)  ermächtigt den Prokuristen zu allen Arten von gerichtlichen/außergerichtlichen Geschäften für das Unternehmen. (b)  kann als Einzel- oder Gesamtprokura vergeben werden.
- (c)  wird im Firmenbuch eingetragen. (d)  kann widerrufen werden.
7. Welche der folgenden Gegebenheiten treffen auf die *Gesellschaft mit beschränkter Haftung* zu?  LI 134.
- (a)  Die GmbH ist eine juristische Person, d.h. eine eigenständige Trägerin von Rechten und Pflichten. (b)  Mindestens ein Gesellschafter haftet mit seinem Privatvermögen unbeschränkt.
- (c)  Das Stammkapital beträgt idR mindestens €35.000. (d)  Die GmbH hat stets einen Geschäftsführer.
8. Welche Aussagen treffen bzgl. der verschiedenen Rechtsformen OG, KG, GmbH, AG zu?  LI 134.
- (a)  KG steht für Kapitalgesellschaft. (b)  Die OG ist im Sinne des § 189 UGB immer rechnungslegungspflichtig (inkl. doppelte Buchhaltung).
- (c)  Der Kommanditist haftet nur bis zu einem Maximalbetrag, der idR durch seine Kommanditeinlage in die Gesellschaft abgedeckt ist. (d)  Der Vorstand der AG ist an Weisungen des Aufsichtsrats gebunden.
9. Welche Aussagen treffen in Bezug auf die österreichische Insolvenzordnung zu?  LI 136.
- (a)  Eine Insolvenz kann aufgrund einer Zahlungsunfähigkeit oder Überschuldung beantragt werden. (b)  Das zuständige Landesgericht überwacht das Unternehmensinsolvenzverfahren.
- (c)  In einem Sanierungsverfahren muss den Gläubigern zumindest eine Quote von 40% über 2 Jahre angeboten werden. (d)  Daten zu Insolvenzverfahren werden über die Ediktsdatei publik gemacht.
10. Was trifft bezüglich Aussonderungs- und Absonderungsrechten zu?  LI 136.
- (a)  Die hypothekarische Sicherstellung (Grundschild) bringt idR ein Absonderungsrecht. (b)  Aussonderungsrechte betreffen Dinge, die dem Schuldner nur teilweise oder nicht gehören.
- (c)  Absonderungsrechte, die auf Sicherstellung beruhen, die in den 12 Monaten vor Insolvenzeröffnung bestellt wurden, verfallen meist. (d)  Abgesonderte Dinge verbleiben in der Insolvenzmasse.

11. Was trifft auf die wesentlichen Quellen des österreichischen Bankenrechts zu?  LI 137.
- (a)  Bankgeschäfte sind im BWG definiert. (b)  Das Bankgeheimnis ist in erster Linie im VKrG geregelt.
- (c)  Ein Kredit über €100 fällt auch unter den Geltungsbereich des VKrG. (d)  Das ZaDiG wurde im Zuge der Umsetzung der Zahlungsdienst-RL der EU eingeführt.
12. Was trifft auf die wesentlichen Quellen des österreichischen Versicherungsrechts zu?  LI 138.
- (a)  Das VersVG fällt in die Kategorie *Sonderprivatrecht*. (b)  Eigenkapitalanforderungen werden über das VAG geregelt.
- (c)  Das UWG regelt die private Unfallversicherung. (d)  Das VAG basiert auf einer Fassung aus dem Jahr 1914 und wurde seitdem nicht wesentlich angepasst.

### 1.5.2 Offene Fragen

1. Stelle Unterschiede zwischen der Personen- und der Kapitalgesellschaft tabellarisch dar. Gehe dabei z.B. auf die Mindestanzahl an Gesellschaftern, die Gesellschafterhaftung, die Rechtsfähigkeit und die Haftung ein.  LI 135.
2. Erkläre kurz die Eckpunkte des Insolvenzverfahrens nach der österreichischen Insolvenzordnung. Wann wird eine Insolvenz beantragt? Welche Verfahrenstypen gibt es? Was sind Absonderungs- und Aussonderungsrechte?  LI 136.
3. Erkläre kurz, auf welche wesentlichen rechtlichen Quellen sich das Bankenrecht in Österreich stützt. Was ist das BWG, VKrG bzw. ZaDiG ?  LI 137.
4. Erkläre kurz, auf welche wesentlichen rechtlichen Quellen sich das Versicherungsrecht in Österreich stützt. Was ist das VersVG bzw. VAG?  LI 138.



# Kapitel 2

## Quantitative Methoden

### Inhalte und Lernziele

In diesem Kapitel werden quantitative Grundlagen, die zum Lösen von Aufgaben in den Bereichen der angewandten Ökonomie, des Risikomanagements oder der Produktbewertung im Bank- bzw. Versicherungsbereich notwendig sind, kompakt vorgestellt. Zum Großteil handelt es sich hierbei um eine Wiederholung mathematischer Techniken, wie sie im Rahmen des AHS-Mathematikunterrichts oder in den mathematisch-statistischen Kursen in einem wirtschaftlichen Bachelor-Studium diskutiert werden. Der Fokus ist dabei auf Konzepte und Ideen gesetzt; theoretische Ausführungen sind durch zahlreiche Beispiele illustriert. Die hier vertiefte Methodenkompetenz umfasst: (a) sicherer Umgang mit Bruch- und Potenzrechnungen, (b) Summierung von Reihen wie sie bei der Lebensversicherungsmathematik auftritt, (c) sicherer Umgang mit Funktionen, (d) Grundverständnis der Differential- und Integralrechnung, (e) Lösung linearer Gleichungssysteme (und Konzept der Matrixschreibweise - diese ist beim Computereinsatz sehr hilfreich), sowie (e) Verständnis wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundkonzepte (essentiell zu Beurteilung von Methoden z.B. im Risikomanagement) inkl. Zufallsvariablen und diskrete und stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Quantile und einige Risikomaße werden im Bank- bzw. Versicherungsteil näher diskutiert. Die in diesem Kapitel diskutierten Methoden, werden z.T. für das Verständnis der anderen Kapitel hilfreich sein.

### 2.1 Mathematische Grundtechniken

**L1 1** **Mengen:** Erkläre diskrete Mengen. Was sind offene bzw. abgeschlossene Intervalle? Welche Zahlen umfassen die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen bzw. reellen Zahlen?

Mehrere Zahlen kann man in **Mengen** zusammenfassen. Zwischen geschwungene Klammern schreiben wir die einzelnen **Elemente** einer **diskreten** Menge durch Strichpunkte getrennt, z.B. die Menge  $A = \{-2; 0; 3, 14\}$  enthält drei Elemente. Die Zahl 5 ist nicht in  $A$  enthalten, die Zahl 3,14 schon und wir schreiben  $3, 14 \in A$  (Anm.  $\in$ : 'Element von') bzw.  $5 \notin A$ .

Im Gegensatz zu diskreten Mengen, interessieren wir uns auch oft für **stetige** Mengen. Wir schreiben stetige Mengen oft als **Intervalle**, und meinen damit die Menge aller beliebigen (reellen) Zahlen zwischen zwei Grenzen  $a$  und  $b$ . Verwenden wir eckige Klammern, also  $B_1 = [a, b]$ , so enthält die Menge  $B_1$  alle Zahlen, die mindestens  $a$  und höchstens  $b$  sind. Man schreibt auch:  $B_1 = \{\text{alle } x, \text{ für die gilt, dass } a \leq x \leq b\}$ , oder kurz  $\{x : a \leq x \leq b\}$ . Sind die beiden Endpunkte des

Intervalls *nicht* enthalten, so verwenden wir runde anstatt eckige Klammern, also  $B_2 = (a, b)$  oder  $B = \{x : a < x < b\}$ . Nimm an, dass beispielsweise  $a = -2$  und  $b = 4,1$ . Verifiziere, dass:  $-4 \notin B_1$ ,  $0 \in B_2$ ,  $4,1 \notin B_2$ ,  $\pi \in B_1$  und  $-4 \notin B_2$ .

Besonders oft werden wir uns auf die Mengen (a) der **natürlichen** Zahlen  $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$ , (b) der **ganzen** Zahlen  $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$  und der **reellen** Zahlen  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  beziehen (Anm.  $\infty$ : 'unendlich'). Eine **Bruchzahl** (auch: *rationale Zahl*) kann durch die Division einer ganzen Zahl im **Zähler** durch eine ganze Zahl im **Nenner** ausgedrückt werden. Der Nenner darf jedoch nicht 0 sein. Die Zahlen  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{3}{1} = 3$ , 0 und  $-\frac{3}{11}$  sind rationale Zahlen. Für die Menge aller rationalen Zahlen schreibt man oft  $\mathbb{Q}$ .

**LI 2** **Bruchzahlen:** Erkläre die Rechenregeln für die Addition bzw. Multiplikation von Bruchzahlen. Wie formt man Doppelbrüche auf normale Bruchform um?

Die folgenden Rechenregeln gelten für rationale Zahlen  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$ , mit  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  und  $b, d \neq 0$ :

$$\text{Addition: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad (2.1)$$

$$\text{Multiplikation: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}. \quad (2.2)$$

Die Division, auch **Doppelbruch** genannt, kann nach der Regel 'Außenglied (a) mal Außenglied (d), durch Innenglied (b) mal Innenglied (c)' gelöst werden, d.h.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}. \quad (2.3)$$



**1** Addiere, multipliziere und dividiere die rationalen Zahlen  $\frac{3}{7}$  und  $\frac{4}{5}$ . Wie führt man die Addition/Multiplikation von drei rationalen Zahlen durch? Verwende die Zahlen  $\frac{3}{7}$ ,  $\frac{4}{5}$  und  $\frac{7}{2}$  für deine Erklärungen.

**Lösung:** Für zwei Zahlen wenden wir die zuvor erklärten Regeln an und erhalten:

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{15 + 28}{35} = \frac{43}{35} \cong 1,23$$

und

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{12}{35} \cong 0,34 \text{ bzw. } \frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28} \cong 0,54.$$

Die Addition (auf gleichen Nenner bringen) und Multiplikation von drei oder mehr rationalen Zahlen funktioniert analog:

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{5} + \frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 7 \cdot 2} + \frac{7 \cdot 7 \cdot 5}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{30 + 56 + 245}{70} = \frac{331}{70} \cong 4,73$$

und

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{7 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{84}{70} = \frac{6}{5} \cong 1,2.$$

**LI 3** **Potenzen und Wurzeln:** Erkläre die  $n$ -te Potenz bzw. die  $n$ -te Wurzel einer Zahl. Welche Rechenregeln gelten bei der Multiplikation bzw. Division von Potenzzahlen?

Wir treffen die Annahme, dass  $m$  und  $n$  ganze Zahlen und  $p$  und  $q$  beliebige reelle Zahlen außer 0



sind, d.h.  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Die  $n$ -te **Potenz** von  $q$  ist dann einfach  $\underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n\text{-mal}}$  und wir schreiben kurz  $q^n$ . Umgekehrt ist die  $n$ -te Wurzel einer Zahl  $q$ , jene Zahl  $a$ , für welche die  $n$ -te Potenz von  $a$  die Zahl  $q$  ergibt. Man schreibt  $a^n = q$  und  $\sqrt[n]{q} = a$ .<sup>1</sup> Es ergeben sich die Rechenregeln

(1) Multiplikation von Potenzzahlen :  $p^n \cdot q^n = (p \cdot q)^n$ , und  $p^n \cdot p^m = p^{m+n}$ .

Aus der rechten Formel ergibt sich, dass  $\sqrt[n]{q} = q^{\frac{1}{n}}$ , da  $\underbrace{q^{\frac{1}{n}} \cdot q^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot q^{\frac{1}{n}}}_{n\text{-mal}} = q^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}} = q^{n \cdot \frac{1}{n}} = q^1 = q$ . Ferner gilt

(2) Division von Potenzzahlen :  $\frac{p^n}{p^m} = p^{n-m}$ , und  $\frac{p^n}{q^m} = p^n q^{-m}$  und

(3) Potenz von Potenzzahlen :  $(p^n)^m = \underbrace{p^n \cdot p^n \cdot \dots \cdot p^n}_{m\text{-mal}} = p^{n \cdot m}$  und  $\sqrt[m]{p^n} = p^{\frac{n}{m}}$ .

Abschließend sei festgehalten, dass  $0^n = 0$ ,  $p^0 = 1$  (per Konvention) und  $1^n = 1$ . Alle obigen Rechenregeln gelten im Grunde auch, wenn  $m$  und  $n$  reelle und nicht nur natürliche Zahlen sind.



**2** Vereinfache den Ausdruck

$$\frac{3^7 \cdot 8^2 \cdot 15^6}{(\sqrt[3]{8})^4 \cdot 3^{-2} \cdot 5^8}$$

auf die Form  $2^l \cdot 3^m \cdot 5^n$ .

**Lösung:** Wir wissen, dass  $2^3 = 8$ , sodass  $\sqrt[3]{8} = 2$ . Faktoren im Nenner können wir durch Vorzeichenwechsel in der Potenz in den Zähler ziehen, ebenso gilt  $15 = 3 \cdot 5$ . Somit ergibt sich

$$\frac{3^7 \cdot 8^2 \cdot 15^6}{(\sqrt[3]{8})^4 \cdot 3^{-2} \cdot 5^8} = 3^7 \cdot (2^3)^2 \cdot (3 \cdot 5)^6 \cdot 2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^{-8} = 2^{2 \cdot 3 - 4} \cdot 3^{7+6+2} \cdot 5^{6-8} = 2^2 \cdot 3^{15} \cdot 5^{-2}.$$

**LI 4** **Arithmetische Reihen:** Definiere den Begriff 'endliche arithmetische Reihe'. Wie berechnet man eine arithmetische Reihe?

Eine **endliche Reihe** ist generell die Summe von endlich vielen, einzelnen Termen (auch: 'Folglieder'). Umfasst diese Summe insgesamt  $n$  Terme, so nennt man die Summe oft  $s_n$ . Die einzelnen Terme werden oft mit  $a_1, a_2, \dots, a_n$  bezeichnet.<sup>2</sup> Beispielsweise ist

$$s_4 = 1 + 3 + 5 + 7$$

eine Reihe bestehend aus 4 Folgengliedern, d.h.  $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5$  und  $a_4 = 7$ . Wir beobachten in unserem Beispiel, dass die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern jeweils 2 beträgt, d.h.  $3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = 2$ . Für ein beliebiges Folgenglied  $a_j$  (hier: z.B.  $j = 3$ ) ist die Differenz zum jeweils vorherigen Folgenglied  $a_{j-1}$  (hier:  $j - 1 = 2$ ) gleich einer Konstanten  $k$  (hier:

<sup>1</sup>Nicht immer existiert solch ein  $a$  in den reellen Zahlen (z.B.  $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ ). In anderen Fällen ist  $a$  nicht eindeutig: z.B.  $2^2 = 4$  und  $(-2)^2 = 4$ .

<sup>2</sup>Für die Summe  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  schreibt man oft (und präziser)  $\sum_{j=1}^n a_j$ . Das Symbol  $\Sigma$  ist der griechische Großbuchstabe 'Sigma' und wird in der Mathematik meist für 'Summe' verwendet. Die Summe ist mittels  $j$  indiziert, wobei  $j$  von 1 (unter dem Summensymbol) bis  $n$  (über dem Summensymbol) in 1er-Schritten läuft. Beispielsweise könnte man die Summe der ersten 10 natürlichen Zahlen als  $\sum_{j=1}^{10} j$  schreiben. Die Summe der ersten 12 Elemente der Zweier-Reihe wäre  $\sum_{j=1}^{12} 2 \cdot j$ .

$k = 2$ ). Gilt die Eigenschaft der konstanten Differenz, so spricht man von einer **arithmetischen Reihe**.



Wir beschäftigen uns nun mit arithmetischen Reihen. Addiert man die konstante Differenz  $k$ ,  $(j - 1)$ -mal zum ersten Term  $a_1$ , so erhält man den  $j$ -ten Term, d.h.  $a_j = a_1 + (j - 1) \cdot k$ . In unserem Beispiel gilt,  $a_2 = 3 = a_1 + 1 \cdot k = 1 + (2 - 1) \cdot 2$ ,  $a_3 = 5 = a_1 + (3 - 1) \cdot k = 1 + 2 \cdot 2$  und  $a_4 = 7 = a_1 + (4 - 1) \cdot k = 1 + 3 \cdot 2$ .

Die Summe kann nun mit einem *Trick* berechnet werden. Wir schreiben die Reihe (a) einmal von vorne nach hinten, und (b) einmal von hinten nach vorne an. Dabei schreiben wir statt dem  $j$ -ten Term  $a_j$  immer  $a_1 + (j - 1) \cdot k$ :

$$s_n = a_1 + (a_1 + k) + \dots + (a_1 + (n - 2) \cdot k) + (a_1 + (n - 1) \cdot k)$$

$$s_n = (a_1 + (n - 1) \cdot k) + (a_1 + (n - 2) \cdot k) + \dots + (a_1 + k) + a_1.$$

Addieren wir nun die rechten und linken Seiten der beiden Gleichungen auf, so erhalten wir rechts für zwei untereinanderstehende Terme jeweils  $2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot k$ , und es ergibt sich insgesamt, dass

$$s_n + s_n = (2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot k) + (2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot k) + \dots + (2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot k),$$

und nachdem die Reihe  $n$  Terme hat, ergibt sich

$$2 \cdot s_n = (2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot k) \cdot n,$$

bzw. kann man dies in die **Summenformel einer arithmetischen Reihe** umformen,

$$s_n = n \cdot a_1 + \frac{(n - 1) \cdot n}{2} \cdot k. \quad (2.4)$$



**3** Berechne die Summe (a) der ersten 50 natürlichen Zahlen und (b) von  $3 + 6 + 9 + \dots + 54$ .

**Lösung:** Die ersten 50 natürlichen Zahlen sind  $1, 2, 3, \dots, 50$ , sodass  $a_1 = 1$ ,  $n = 50$ ,  $k = 1$  gilt. Wir verwenden Formel (2.4) und erhalten  $s = 50 \cdot 1 + \frac{49 \cdot 50}{2} \cdot 1 = 1,275$ . Für die zweite Reihe gilt  $a_1 = 3$ ,  $n = 54/3 = 18$  und  $k = 3$ , sodass sich für die Summe  $s = 18 \cdot 3 + \frac{17 \cdot 18}{2} \cdot 3 = 513$  ergibt. Für eine allgemeine natürliche Zahl  $n$  (statt: 50) wird die Summenformel für die ersten  $n$  natürlichen Zahlen auch oft als  $s_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$  angegeben. Überprüfe, dass diese Formel mit (2.4) übereinstimmt.

**LI 5 Geometrische Reihen:** Erkläre den Begriff 'endliche geometrische Reihe'. Wie berechnet man eine geometrische Reihe? Wo finden geometrische Reihen eine praktische Anwendung?

Während bei arithmetischen Reihen die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant war, ist bei **geometrischen Reihen** der **Quotient** aus jedem (außer dem ersten) Folgenglied zum Vorgänger konstant, d.h.  $\frac{a_j}{a_{j-1}} = q$  für  $j = 2, \dots, n$ . Die Reihe  $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$  ist eine geometrische Reihe mit  $q = 2$ , d.h. jedes Folgenglied ergibt sich indem man den Vorgänger mit  $q = 2$  multipliziert ( $4 = 2 \cdot 2$ ,  $8 = 4 \cdot 2$ ,  $16 = 8 \cdot 2$  etc.). Für eine geometrische Reihe gilt, dass das  $j$ -te Element  $a_j$  berechnet werden kann, indem man  $a_1$   $(j - 1)$ -mal mit  $q$  multipliziert, d.h.  $a_j = a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{(j-1)\text{-mal}} = a_1 \cdot q^{j-1}$ . Im obigen Beispiel mit  $a_1 = 2$  und  $q = 2$  gilt etwa  $8 = 2 \cdot 2^2$  und

$$16 = 2 \cdot 2^3.$$



Wir können wiederum einen *Trick* anwenden, um die Summe zu berechnen. Dazu schreiben wir die Summe selbst an, und das  $q$ -fache der Summe. Die zweite der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 \cdot q + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1} \\ q \cdot s_n &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n \end{aligned}$$

ziehen wir von der ersten ab und erhalten

$$s_n - q \cdot s_n = a_1 - a_1 \cdot q^n,$$

was sich in die **Summenformel einer endlichen geometrischen Reihe** als

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \tag{2.5}$$

umschreiben lässt. Einen besonderer Fall tritt ein, wenn  $q$  einen Wert zwischen  $-1$  und  $1$  annimmt und  $n$  sehr groß (im Grenzfall:  $\infty$ ) ist. Dann gilt, dass  $q^n \approx 0$  (im Grenzfall:  $0$ ) ist, sodass sich die **Summenformel einer unendlichen geometrischen Reihe** mit  $|q| < 1$  als

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q} \tag{2.6}$$

darstellen lässt. Dass  $q^n$  für  $q < 1$  gegen Null geht, kann man leicht überprüfen, indem man eine positive Zahl kleiner als  $1$ , z.B.  $q = \frac{1}{2}$ , wiederholt mit sich selbst multipliziert. Man berechnet  $q^2 = \frac{1}{4} = 0,25$ ,  $q^3 = \frac{1}{8} = 0,125$ ,  $q^4 = \frac{1}{16} = 0,0625$  und  $q^{10} = 0,00098$  etc. Geometrische Reihen finden Anwendung beim Aufzinsen und Diskontieren im Finanzbereich und in der Lebensversicherung (vgl. Kapitel 4).



**4** Die Bewertung einer Immobilie wird durch das Diskontieren der zukünftigen Nettomieten vorgenommen. Der Diskontierungssatz sei  $r = 0,05$ . Die Nettomiete wird fix bei €8.000 am Ende jeden Jahres angenommen. Mögliche Mietsteigerungen sind im Diskontierungssatz reflektiert. Was ist der Wert der Immobilie wenn man (a) die Nettomieten der nächsten 20 Jahre, oder (b) alle zukünftigen Nettomieten berücksichtigt?

**Lösung:** Im Gegensatz zum Verzinsen mit Zinssatz  $r$ , bei dem man einen Betrag über eine Periode mit  $(1 + r)$  aufzinst, macht man beim **Abzinsen** (auch: *Diskontieren*) zukünftiger Zahlungen das Umgekehrte und *dividiert* durch  $(1 + r)$  pro Diskontierungsperiode. Der **Diskontierungsfaktor** für eine Zahlung nach  $j$  Perioden ist somit  $q^j = \left(\frac{1}{1+r}\right)^j$ . Unter Punkt (a) ergibt sich der Wert der Immobilie somit als

$$s_{20} = 8.000 \cdot q + 8.000 \cdot q^2 + \dots + 8.000 \cdot q^{20}$$

mit  $q = \frac{1}{1+0,05} = 0,9524$ . Dies ist eine geometrische Reihe, und wir berechnen die Summe mittels Formel (2.5) und  $a_1 = 8.000 \cdot 0,9524$  und  $n = 20$  als  $s_{20} = 8.000 \cdot 0,9524 \cdot \frac{1 - 0,9524^{20}}{1 - 0,9524} = 99.715$  (Anmerkung: der exakte Wert ist 99.698). Unter Punkt (b) diskontieren wir alle (d.h.

unendlich viele) zukünftigen Mieteinnahmen, und erhalten nach Formel (2.6) einen Immobilienwert von  $s = 8.000 \cdot 0,9524 \cdot \frac{1}{1-0,9524} = 160.000$ .

**LI 6** **Quadratische Gleichungen:** Definiere eine quadratische Gleichung. Wie kann Sie gelöst werden? Welche Fälle können bzgl. der Lösungsmenge auftreten?

Für gegebene reelle Zahlen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  (z.B.  $a = 2$ ,  $b = 0,5$  und  $c = 1$ ), mit  $a \neq 0$ , ist die Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad (2.7)$$

eine sogenannte **quadratische Gleichung**. Diese Art von Gleichung hat keine, eine oder zwei Lösungen in den reellen Zahlen. Man kann zeigen, dass nur die zwei Ausdrücke

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.8)$$

als Lösungen in Frage kommen. Konkret ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:<sup>3</sup>

1.  $b^2 - 4ac < 0$ : die Wurzelausdrücke in  $x_1$  und  $x_2$  sind (im Reellen) nicht definiert, es existiert keine reelle Lösung der Gleichung,
2.  $b^2 - 4ac = 0$ : da  $\sqrt{0} = 0$ , nehmen beide Lösungen denselben Zahlenwert an und man kann berechnen, dass  $x_1 = x_2 = -b/(2a)$  ('eine Doppellösung'),
3.  $b^2 - 4ac > 0$ : die Gleichung hat zwei unterschiedliche reelle Lösungen,  $x_1$  und  $x_2$ .



**5** Löse die quadratische Gleichung  $2x^2 - 14x + 24 = 0$ .

**Lösung:** Um die Lösungsformel (2.8) zu verwenden, setzen wir  $a = 2$ ,  $b = -14$  und  $c = 24$ . Damit ergeben sich die zwei Lösungen

$$x_1 = \frac{14 - \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 24}}{2 \cdot 2} = \frac{14 - \sqrt{4}}{4} = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{14 + \sqrt{4}}{4} = 4.$$



**6** Löse die quadratischen Gleichungen (a)  $2x^2 - 12x + 18 = 0$  und (b)  $3x^2 - 6x + 4 = 0$ .

**Lösung:** Im Fall (a) ergibt sich  $b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 0$  und wir erhalten die Doppellösung  $x_1 = x_2 = -(-12)/(2 \cdot 2) = 3$ . Im Fall (b) erhält man, dass  $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = -12$ . Damit ist die Wurzel in der Lösungsformel nicht definiert und es gibt keine reellen Lösungen  $x_1, x_2$ .

## 2.2 Funktionen

**LI 7** **Funktionen:** Erkläre den Begriff einer 'Funktion' in der Mathematik. Welche Eigenschaften haben Funktionen? Gib Beispiele von Funktionen an.

<sup>3</sup>Man kann zeigen, dass  $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ , sofern  $x_1$  und  $x_2$  wohldefiniert sind (d.h.  $x_1$  und  $x_2$  sind Kandidaten für die Lösung). In diesem Fall wäre die quadratische Gleichung für  $x = x_1$  bzw.  $x = x_2$  gelöst, da dann  $(x - x_1) = 0$  bzw.  $(x - x_2) = 0$  gilt und das Produkt, in dem ein Faktor 0 ist, auch 0 ist. Die Wurzel aus einer negativen Zahl ist jedoch (reellwertig) nicht definiert.

Eine **Funktion**  $f$  ist eine Abbildung, die jedem Element einer **Definitionsmenge**  $\mathcal{D}$  genau ein Element einer Zielmenge  $Z$  zuordnet, man schreibt auch  $f : \mathcal{D} \rightarrow Z$ . Jedem Element  $x \in \mathcal{D}$  wird genau ein Element  $f(x) = y \in Z$  zugeordnet (man schreibt auch:  $x \mapsto f(x)$ ). Gilt beispielsweise  $\mathcal{D} = \{2, 5, 8\}$  und  $Z = \{1, 3, 6, 9, 11\}$ , so ist die Abbildung die jedem Element  $x$  aus  $\mathcal{D}$  die jeweils um eins größere Zahl  $x + 1$  zugeordnet (3, 6 und 9 sind in  $Z$  enthalten!), eine Funktion von  $\mathcal{D}$  auf  $Z$ . Wir schreiben:  $f(x) = x + 1$ , ( $\mathcal{D} \rightarrow Z$ ). **Wichtig:** die Menge  $Z$  kann zu den möglichen Funktionswerten  $f(\mathcal{D}) = \{3, 6, 9\} \subseteq Z$  auch *zusätzliche* Werte enthalten, in unserem Fall 1 und 11. In der praktischen Anwendung werden  $\mathcal{D}$  bzw.  $Z$  oft als die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  (z.B. Gewinn-/Verlustfunktion eines Unternehmens) oder die positiven reellen Zahlen  $\mathbb{R}^+$  (z.B. Höhe eines Versicherungsanspruchs) angesetzt.

Die folgenden sind einige gängige Beispiele von Funktionen:

- **Konstante Funktion:**  $f(x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Beispiel:  $f(x) = 3$ . Man kann z.B. auswerten, dass  $f(-4) = 3$ ,  $f(0) = 3$  und  $f(3) = 3$ .
- **Lineare Funktion:**  $f(x) = a \cdot x + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$ ,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Beispiel:  $f(x) = 2 \cdot x + 3$ . Man kann z.B. auswerten, dass  $f(-4) = 2 \cdot (-4) + 3 = -5$ ,  $f(0) = 3$  und  $f(3) = 9$ .
- **Quadratische Funktion:**  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$ ,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Beispiel:  $f(x) = 2 \cdot x^2 - x + 3$ . Man kann z.B. auswerten, dass  $f(-4) = 2 \cdot (-4)^2 - (-4) + 3 = 39$ ,  $f(0) = 3$  und  $f(3) = 18$ .
- **Betrags-Funktion:**  $f(x) = |x|$ ,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Die Funktion bildet positive Werte in sich selbst ab,  $x \mapsto x$  (für  $x \geq 0$ ), und liefert für negative Werte deren Absolutbetrag  $x \mapsto -x$  (für  $x < 0$ ). Beispiel:  $f(x) = |x|$ . Man kann z.B. auswerten, dass  $f(-4) = -(-4) = 4$ ,  $f(0) = 0$  und  $f(3) = 3$ .



**7** Gegeben seien die Funktionen  $f(x) = x + 3$ ,  $g(x) = 2 \cdot x^2 - 2$  und  $h(x) = 2 \cdot |x|$  (jeweils  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ). Werte die **verketteten Funktionen**  $g(h(x))$ ,  $h(f(x))$  und  $g(f(x))$  an den Stellen  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$  und  $x_3 = \frac{3}{2}$  aus.

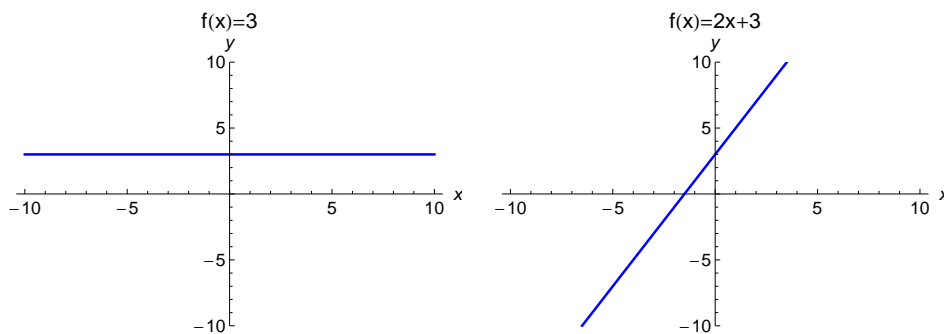
**Lösung:** Verkettete Funktionen werden von innen nach außen ausgewertet, im ersten Fall ist die Zuordnung  $x \mapsto h(x)$ , gefolgt von  $h(x) \mapsto g(h(x))$ . Wir erhalten  $g(h(-2)) = g(2 \cdot (-(-2))) = g(4) = 2 \cdot 4^2 - 2 = 30$ ,  $g(h(0)) = g(0) = 2 \cdot 0^2 - 2 = -2$  und  $g(h(3/2)) = g(2 \cdot 3/2) = g(3) = 2 \cdot 3^2 - 2 = 16$ . Analog erhalten wir im zweiten Fall  $h(f(-2)) = h(-2 + 3) = h(1) = 2 \cdot |1| = 2$ ,  $h(f(0)) = h(0 + 3) = h(3) = 2 \cdot |3| = 6$  und  $h(f(3/2)) = h(3/2 + 3) = h(9/2) = 2 \cdot |9/2| = 9$ . Schlussendlich kann man berechnen, dass  $g(f(-2)) = g(-2 + 3) = g(1) = 2 \cdot 1^2 - 2 = 0$ ,  $g(f(0)) = g(0 + 3) = g(3) = 2 \cdot 3^2 - 2 = 16$  und  $g(f(3/2)) = g(3/2 + 3) = g(9/2) = 2 \cdot (9/2)^2 - 2 = 81/2 - 2 = 77/2$ .

**LI 8 Funktionsgraphen:** Erkläre die Darstellung von Funktionen in der  $x - y$ -Ebene. Welche geometrische Form haben konstante, lineare, quadratische und Betrags-Funktionen?

Funktionen in einer Variablen  $x$  werden oft in der  $x - y$ -**Ebene** grafisch dargestellt (vgl. Abbildung 2.1). Die horizontale Achse heißt  $x$ -Achse (oder: Abszisse), die vertikale Achse heißt  $y$ -Achse (oder: Ordinate). Der Schnittpunkt beider Achsen heißt **Ursprung**. Kombinationen  $(x, y)$  (auch: Koordinaten) werden grafisch dargestellt, indem man den Punkt markiert, der vom Ursprung  $x$  Einheiten entlang der  $x$ -Achse (also: nach rechts) und  $y$  Einheiten entlang der  $y$ -Achse (also: nach oben)

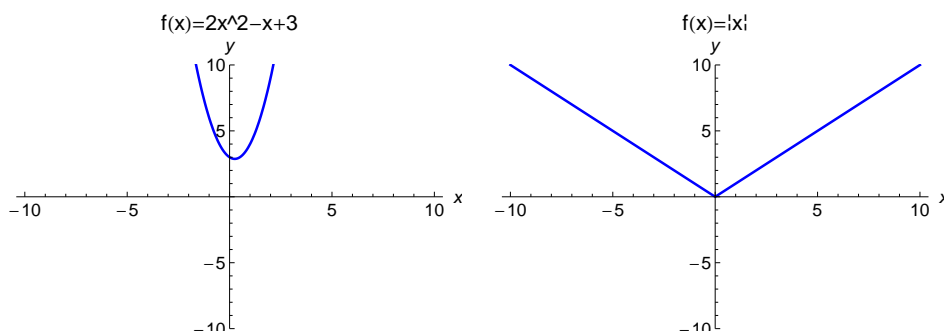
entfernt ist. Um zum Punkt  $(3, 4)$  zu gelangen, geht man vom Ursprung aus 3 Einheiten nach rechts, und 4 Einheiten hinauf. Um zum Punkt  $(-2, -1)$  zu gelangen, geht man vom Ursprung 2 Einheiten nach links und dann eine Einheit hinunter.

Funktionen kann man nun in der  $x - y$ -Ebene darstellen, indem man die Punkte  $(x, f(x))$  (d.h. wir verwenden die Notation  $y = f(x)$ ) für alle Möglichkeiten von  $x \in \mathcal{D}$  (z.B. für alle reellen Zahlen  $x$  im **Koordinatensystem**) markiert. Das ist in den Abbildungen 2.1 und 2.2 für einige Funktionen dargestellt. Die konstante Funktion (z.B.  $f(x) = 3$ ) ist dabei eine **Gerade parallel zur  $x$ -Achse**. Im Beispiel enthält sie z.B. die Punkte  $(-4, 3)$ ,  $(0, 3)$  und  $(3, 3)$ . Eine lineare Funktion ist ebenfalls eine **Gerade**. Am Beispiel  $f(x) = 2x + 3$  sieht man, dass der Abstand entlang der  $y$ -Achse zwischen dem Ursprung  $(0, 0)$  und der Geraden genau 3 beträgt (d.h. der Punkt  $(0, 3)$  liegt auf der Geraden). Der konstante Term der Funktion 3 beschreibt ebendiesen Abstand. Der **Koeffizient** von  $x$  in  $f(x)$ , hier ist er 2, besagt, dass sich für jeden  $x$ -Schritt (eine Einheit) nach rechts der Funktionswert um 2 erhöht. Für z.B. 4 Schritte nach rechts, steigt der Funktionswert dann um  $4 \cdot 2 = 8$ . Der Koeffizient von  $x$  wird daher **Steigung** der Geraden genannt.



**Abbildung 2.1:** Konstante Funktion  $f(x) = 3$  (links) und lineare Funktion  $f(x) = 2x + 3$  (rechts).

Die quadratische Funktion hat die Form einer Parabel. Die Betragsfunktion  $f(x) = |x|$  gleicht entlang der positiven  $x$ -Achse der Funktion  $f(x) = x$ . Entlang der negativen  $x$ -Achse wird die Funktion  $f(x) = x$  an der  $x$ -Achse ins Positive gespiegelt, da ja  $|x| = -x$  für  $x < 0$  gilt.



**Abbildung 2.2:** Quadratische Funktion  $f(x) = 2x^2 - x + 3$  (links) und Betrags-Funktion  $f(x) = |x|$  (rechts).



8 Stelle die Funktionen (a)  $f(x) = |2x + 3|$ , (b)  $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4 \cdot x + 3$  und (c)  $h(x) = -\frac{1}{3}x + 1$  dar, indem du die Funktion für einige Werte  $x$  auswertest und die Punkte dann entsprechend deines Wissens um die Form der Funktion (Gerade, Parabel etc.) verbindest. An wie vielen Stellen musst du eine lineare Funktion auswerten,

um die Gerade zu zeichnen?

**Lösung:** Wird dem Leser überlassen. Computerprogramme erzeugen Graphen meist, indem sie  $f(x)$  entlang des gewählten  $x$ -Achsen-Abschnittes (in den Abbildungen oben  $x \in [-10; 10]$ ) von links nach rechts in kleinen Schritten  $\Delta x$  (z.B.  $\Delta x = 0,1$ ) auswertet und die Punkte im Koordinatensystem markieren. Optisch sieht das dann so aus, als ob der Graph durchgängig (auch: **stetig**) gezeichnet wäre.

**LI 9** **Polynomfunktion:** Erkläre den Begriff Polynom(-funktion). Was ist der Grad eines gegebenen Polynoms?

Ein **Polynom** bzw. eine Polynomfunktion  $p(x)$  vom **Grad**  $n$  hat die Form

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0. \quad (2.9)$$

Es gilt  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , die **Koeffizienten**  $a_j \in \mathbb{R}$  sind beliebige reelle Zahlen (oder: **Parameter**), zudem fordern wir  $a_n \neq 0$ , d.h. der Term mit  $x^n$  ist der größte vorkommende Term.<sup>4</sup> Polynome sind wichtige Werkzeuge in der Mathematik.



**9** Sind die folgenden Funktionen Polynome? Wenn ja, welchen Grad haben Sie? Die Funktionen lauten (a)  $f(x) = x^5 + 2x^2 - x + 1$ , (b)  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ , (c)  $h(x) = 0$  und (d)  $i(x) = (x-3)^2(x^2+4)(x^2-1)^3$ .

**Lösung:** Die Funktion  $f(x)$  fällt direkt unter die obige Definition eines Polynoms und hat den Grad 5 (höchste Potenzzahl).  $g(x) = x + x^{-1}$  ist kein Polynom, da negative Hochzahlen nicht in der obigen Definition enthalten sind.  $h(x)$  ist ein Polynom vom Grad 0. Für  $i(x)$  werden nur  $x$ -en und reelle Zahlen aufmultipliziert. Der Grad von  $(x-3)^2$  ist 2, der Grad von  $(x^2+4)$  ist auch 2 und der Grad von  $(x^2-1)^3$  ist 6 (höchste Hochzahl 2 in der Klammer, mal der äußeren Potenz 3). Wie man durch Ausmultiplizieren leicht verifizieren kann, sind die Hochzahlen additiv (da  $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ , vgl. LI Potenzen und Wurzeln), d.h. der Grad von  $i(x)$  ist  $2+2+6 = 10$ .

**LI 10** **Exponential- bzw. Logarithmusfunktion:** Definiere die Exponential- bzw. (natürliche) Logarithmusfunktion. Beschreibe den Zusammenhang zwischen Exponential- und Logarithmusfunktion. Beschreibe anhand der beiden Funktionen die Konzepte (a) Grenzwerte, (b) Monotonie und (c) Stetigkeit.

Die Funktion  $f(x) = a^x$ , mit  $a > 0$  und  $a \neq 1$ , und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , ist eine **Exponentialfunktion im weiteren Sinne**. Die Zahl  $a$  heißt **Basis**, die Zahl  $x$  **Exponent**. Eine verwandte Funktion haben wir bereits bei den Potenz-Rechenregeln kennen gelernt (allerdings für natürliche, und nicht allgemein reelle, Exponenten). Eine praktische Anwendung findet die Exponentialfunktion z.B. in der Beschreibung von Populations-Wachstum (z.B. in der Biologie). Man nehme an, dass sich eine Population über jede Generation (oder: über jedes Jahr) verdoppelt. Nach einem Jahr hätte man dann  $2^1 = 2$ -mal die Ausgangspopulation, nach 2 Jahren  $2^2 = 4$ -mal die Ausgangspopulation und nach  $x$  Jahren hätte man  $2^x$ -mal die Ausgangspopulation. Ein solches Wachstum wird **exponentielles Wachstum** genannt. Spricht man von der **Exponentialfunktion im engeren Sinne** (oder einfach: Exponentialfunktion), so meint man meist die Funktion  $f(x) = e^x$  (alternativ:  $f(x) = \exp(x)$ ). Im Unterschied zu vorher ist die Basis nun nicht ein allgemeines  $a$ , sondern eine spezielle Konstante  $e = 2,7183\dots$ .

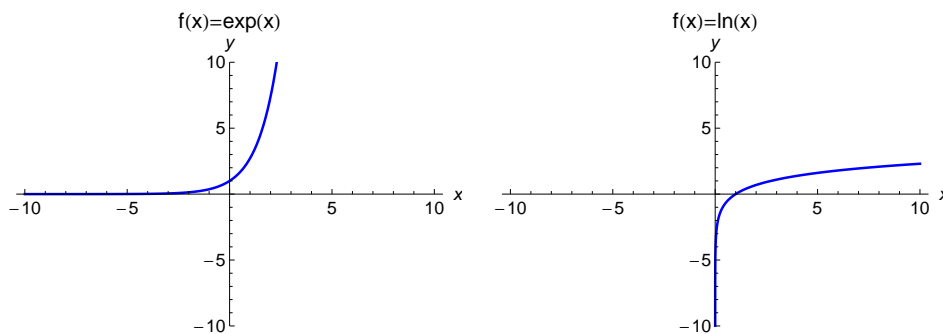
<sup>4</sup>Erinnern wir uns an die *Summenschreibweise*, so können wir das Polynom auch einfach als  $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j \cdot x^j$  schreiben.



Die Zahl 'e' heißt auch **Eulersche Zahl** und ist definiert durch

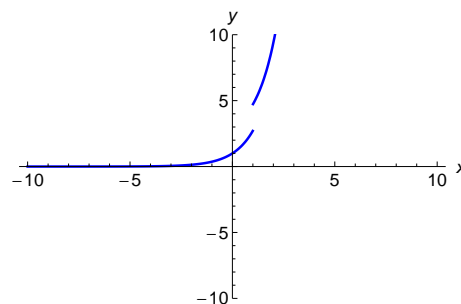
$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (2.10)$$

im Fall  $x = 1$ . Diese Formel ist wie folgt zu lesen: wenn  $n$  sehr, sehr groß gewählt wird, so liefert die Funktion  $\exp(x)$  annähernd den gleichen Wert wie die Funktion  $(1 + x/n)^n$ . Im **Grenzwert** oder **Limes** (mathematisch:  $\lim$ ; hier speziell wenn 'n gegen unendlich' geht,  $n \rightarrow \infty$ ) sind die beiden Funktionen dann identisch. D.h. aufgrund dieser Eigenschaft, kann man  $\exp(x)$  für sehr große  $n$  u.U. als Approximation von  $(1 + x/n)^n$  einsetzen (ab welchem  $n$  diese Approximation 'gut genug' ist, bedürfte aber weiterer Analyse).



**Abbildung 2.3:** Exponentialfunktion  $f(x) = \exp(x)$  (links) und Logarithmusfunktion  $f(x) = \ln(x)$  (rechts).

In Abbildung 2.3 können wir ablesen, dass die Funktion  $\exp(x)$  für positive und negative reelle  $x$ -Werte definiert ist, also  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ . Speziell gilt  $e^0 = 1$ . Die abgebildeten Funktionswerte sind alle positiv. Für  $x$  sehr weit im Negativen geht die Funktion sehr nahe an 0, man schreibt  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ . Auf der anderen Seite wächst die Funktion sehr schnell und es gibt keine obere Schranke für  $f(x)$ , die nicht für ausreichend großes  $x$  überschritten wird. Man schreibt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ . Die Funktionskurve steigt stets an, das nennt man **streng monoton steigend** (d.h. ist ein  $x$ -Wert  $x_2$  des Definitionsbereichs größer als ein anderer  $x_1$ , so ist auch  $f(x_2) = e^{x_2}$  immer größer als  $f(x_1) = e^{x_1}$ ). Die Exponentialfunktion ist auch **stetig**, d.h. der Graph der Funktion hat keine Sprungstellen (vgl. Abbildung 2.4: diese Funktion zeigt eine **Unstetigkeitsstelle** bei  $x = 1$ , somit ist diese Funktion **nicht stetig**).



**Abbildung 2.4:** Eine Funktion mit Unstetigkeitsstelle bei  $x = 1$ :  $f(x) = \exp(x)$  für  $x < 1$  und  $f(x) = \exp(x) + 2$  für  $x \geq 1$ . Diese Funktion ist im Gegensatz zur Exponentialfunktion nicht stetig.

Eine stetige, streng monoton steigende Funktion ist stets invertierbar, d.h. es existiert eine **Umkehrfunktion**  $f^{-1}(x)$ , sodass die Umkehrfunktion angewandt auf den Funktionswert  $f(x)$  wieder den



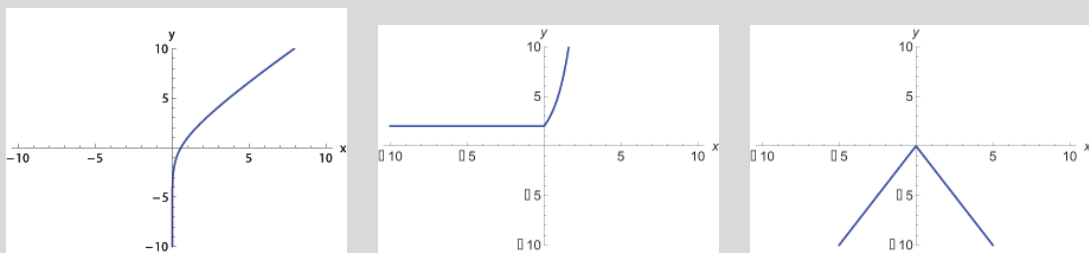
Angangswert  $x$  ergibt, d.h.  $f^{-1}(f(x)) = x$ . Im Fall der Exponentialfunktion heißt die Umkehrfunktion (natürliche) **Logarithmusfunktion**,  $\ln(x)$  (manchmal auch:  $\log(x)$ ). D.h. es gilt:  $\ln(\exp(x)) = x$ . Da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt (siehe vorher), ist die Logarithmusfunktion nur für positive  $x$  definiert, d.h.  $\mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}^+$ . Wir beobachten in Abbildung 2.3, dass auch  $\ln(x)$  **streng monoton steigend** und **stetig** auf  $\mathcal{D}_{\ln}$  ist (d.h. keine Sprungstellen hat). Ohne es zu beweisen, sehen wir, dass  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  (Anm. ' $\rightarrow 0^+$ ': heißt Grenzwert Richtung 0, aber von oben angenähert (+)) und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$ . Die Logarithmusfunktion **wächst viel langsamer** als die Exponentialfunktion.



**10** Entscheide, ob die folgenden Funktionen (a) streng monoton steigend bzw. (b) stetig sind, und bestimme (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Existiert jeweils eine Umkehrfunktion über den ganzen Definitionsbereich? Die Funktionen seien

$$(I) f_1(x) = x + \ln(x), x > 0, \quad (II) f_2(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq 0 \\ 2 \cdot \exp(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}, \quad (III) f_3(x) = -2 \cdot |x|, x \in \mathbb{R}.$$

**Lösung:** Nachfolgend sind die Plots der Funktionen (I)  $f_1(x)$  (links), (II)  $f_2(x)$  (Mitte) und (III)  $f_3(x)$  abgebildet.



(I) Die Funktion  $f_1(x)$ ,  $x > 0$  ist, als **Summe zweier stetiger Funktionen, wieder stetig**. Ebenso gilt, dass  $f_1(x)$ , als Summe zweier streng monoton steigender Funktionen, wieder streng monoton steigend ist. Die Funktion geht gegen 'unendlich',  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$ . Die Funktion ist stetig und streng monoton steigend, damit besitzt sie auch eine Umkehrfunktion, d.h. zu jedem  $y \in \mathbb{R}$  kann man **eindeutig** jenes  $x$  bestimmen, sodass  $f_1(x) = y$ . (II) Die Funktion  $f_2(x)$  ist stetig. Links und rechts von Null ist das der Fall, da sowohl  $2$  als auch  $2 \cdot \exp(x)$  stetige Funktionen sind. Wir berechnen,  $2 \cdot \exp(0) = 2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2$ , somit ist die Funktion überall stetig. Die Funktion ist nur monoton steigend, aber nicht streng monoton steigend. Der Grenzwert ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \exp(x) = \infty$ . Die Umkehrfunktion existiert nicht in  $y = 2$  (verschiedene Argumente  $x$  erzeugen den  $y$ -Wert 2, die Zuordnung ist nicht eindeutig). (III) Die Funktion  $f_3(x)$  ist stetig, weder monoton fallend noch steigend (für negative  $x$ : streng monoton steigend, für positive  $x$ : streng monoton fallend). Der Grenzwert beträgt  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_3(x) = -\infty$ . Die Umkehrfunktion kann nicht bestimmt werden (alle negativen  $y$ -Werte können jeweils durch 2 möglich  $x$ -Werte erreicht werden).

**L1 11** **Rechenregeln für Exponential- und Logarithmusfunktion:** Erkläre die Rechenregeln für  $\ln(y_1) + \ln(y_2)$ ,  $\ln(y_1^p)$  und  $\exp(y_1) \cdot \exp(y_2)$ .

Wie schon intuitiv bei den Potenz-Rechenregeln erklärt, gilt allgemein für reelle Zahlen  $x_1, x_2, p$  (bzw.

positive reelle Zahlen  $y_1, y_2$ ), dass

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2} \quad (2.11)$$

und

$$\ln(y_1^p) = p \cdot \ln(y_1) \quad \text{bzw.} \quad \ln(y_1) + \ln(y_2) = \ln(y_1 \cdot y_2) \quad \text{bzw.} \quad \ln(y_1) - \ln(y_2) = \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right). \quad (2.12)$$

Aus der ersten Exponentialregel folgt, dass  $(e^x)^p = e^{p \cdot x}$  (für ganzzahlige  $x$  ist das leicht zu sehen, da  $\underbrace{e^x \cdot e^x \cdot \dots \cdot e^x}_{p\text{-mal}} = e^{x+x+\dots+x} = e^{p \cdot x}$ ). Ein  $y_1$  kann jeweils als  $y_1 = e^{x_1}$  (und umgekehrt:

$\ln(y_1) = \ln(e^{x_1}) = x_1$ ) dargestellt werden. Dann gilt, dass  $\ln(y_1^p) = \ln((e^{x_1})^p) = \ln(e^{p \cdot x_1}) = p \cdot x_1 = p \cdot \ln(y_1)$ , was die erste Logarithmusformel oben beweist. Ebenso gilt, dass  $\ln(y_1 \cdot y_2) = \ln(e^{x_1} \cdot e^{x_2}) = \ln e^{x_1+x_2} = x_1 + x_2 = \ln(y_1) + \ln(y_2)$ . Die letzte Formel wird analog gezeigt.<sup>5</sup>



**11** Vereinfache den folgenden Ausdruck soweit wie möglich:

$$\ln\left((e^a)^2 \cdot \frac{(e^b)^c}{e^{2 \cdot a} \cdot (e^c)^b}\right) + e^{p \cdot a} - e^{(p-1)a}.$$

**Lösung:** Wir vereinfachen den obigen Ausdruck zu

$$\ln\left(e^{2 \cdot a} \cdot \frac{e^{b \cdot c}}{e^{2 \cdot a} \cdot e^{b \cdot c}}\right) + e^a \cdot e^{(p-1)a} - e^{(p-1)a} = \ln(1) + e^{(p-1)a} \cdot (e^a - 1) = e^{(p-1)a} \cdot (e^a - 1).$$

Wichtig: für die Summe  $e^a + e^b$  und das Produkt  $\ln(a) \cdot \ln(b)$  gibt es keine speziellen Formeln.

**LI 12** **Stetige Verzinsung (als Anwendung der Exponentialfunktion):** Erkläre die Begriffe 'nomineller Zinssatz', 'unterjährig Verzinsung' und 'Effektivverzinsung'. Welche Rolle spielen die Exponential- und Logarithmusfunktion im Zusammenhang mit 'stetiger Verzinsung'.

Bei der Einzahlung von Kapital auf ein Konto werden grundsätzlich Zinsen bezahlt. Wird ein **nomineller Zinssatz** von  $r = 5\%$  p.a. (p.a. steht für 'per annum', also: über ein Jahr) vereinbart, der jährlich nachschüssig bezahlt wird, so hat ein Konto mit Anfangskapital  $K_0 = 100$  am Ende des Jahres einen Kontostand von  $K_1 = 100 \cdot (1 + r) = 100 \cdot 1,05 = 105$ . Nehmen wir nun an, dass Zinsen am Konto erhalten werden. Das Anfangskapital im zweiten Jahr beträgt 105. Nach Verzinsung im zweiten Jahr haben wir  $105 \cdot 1,05 = 110,25$  am Konto. Wir beobachten, dass wir den Kontostand nach zwei Jahren auch direkt als  $K_2 = 100 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 110,25$  und ohne das Zwischenergebnis von 105 berechnen hätten können. Es gilt  $100 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 100 \cdot 1,05^2$ , und allgemein hat man nach  $n$  Jahren, mit  $n \in \mathbb{N}$ , einen Kontostand von

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n. \quad (2.13)$$

Der Effekt, wenn Zinsen am Konto verbleiben und das Konto **exponentiell** mit Basis  $1 + r$  (und somit relativ schnell) wächst, nennt man oft **Zinseszinsseffekt**. Anders hätte man auch vereinbaren

<sup>5</sup>Vor der Zeit von Computern wurden große Multiplikationen oft mittels **Logarithmustabellen** bewältigt. Für die Multiplikation von zwei Zahlen  $a$  und  $b$  berechnet man in einem ersten Schritt  $\ln(a)$  und  $\ln(b)$ . Addiert man die beiden Logarithmen auf, so weiß man, dass  $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$ . Nun wendet man die Exponentialfunktion auf diese Summe an, und erhält das Produkt von  $a$  und  $b$  als  $\exp(\ln(a \cdot b)) = a \cdot b$ . Sind alle Logarithmen und Exponentiale fertig tabellarisch vorgegeben, so kann man Multiplikationen auch einfach durch eine Addition und entsprechende Ln/Exp-Transformationen ausführen.

können, dass Zinsen halbjährlich, quartalsmäßig, monatlich oder – allgemein –  $m$ -mal pro Zinsperiode ausbezahlt werden. Der nominale Zinssatz bleibt bei  $r_{\text{nom}} = 5\%$ . Bei halbjährlicher Zahlung bekommen wir jeweils  $\frac{5\%}{2}$  nach 6 und nach 12 Monaten, in Bezug auf den Kontostand über die jeweils letzten 6 Monate. Nach einem Jahr haben wir somit  $K_1 = 100 \cdot (1 + 5\%/2)^2 = 105,06$ . Der **effektive Zinssatz** ist somit von 5% auf 5,06% gestiegen. Bei quartalsmäßiger Verzinsung steht der Kontostand nach einem Jahr bei  $100 \cdot (1 + 5\%/4)^4 = 105,09$  und je dichter wir die **unterjährig**en Verzinsungsperioden wählen, umso mehr steigt der Kontostand am Ende des Jahres bzw. der effektive Zinssatz. Bei  $m$  Verzinsungsperioden in einem Jahr, beträgt der Kontostand am Ende allgemein

$$K_1 = K_0 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m}_{\text{Verzinsungsfaktor}}.$$

Der effektive Zinssatz  $r_{\text{eff}}$  kann nun als jener (fiktive) jährlich nachschüssig bezahlte Zinssatz definiert werden, der zum gleichen Kontostand führt, wie der nominelle Zinssatz, der  $m$ -mal unterjährig bezahlt wird, d.h.

$$\left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m = 1 + r_{\text{eff}}.$$

Wir erinnern uns an Formel (2.10), und schließen, dass im Grenzfall, wenn Zinsen die ganze Zeit ausbezahlt werden – also im Fall **stetiger (oder: kontinuierlicher) Verzinsung**, für den Verzinsungsfaktor

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m = e^{r_{\text{nom}}}$$

gilt. Der entsprechende nominelle Zinssatz  $r_{\text{nom}}$  bei stetiger Verzinsung, der zu einem Effektivzinssatz von  $r_{\text{eff}}$  führt, kann wie folgt berechnet werden (indem man die Logarithmusfunktion auf beide Seiten der linken Gleichung anwendet):

$$e^{r_{\text{nom}}} = 1 + r_{\text{eff}} \iff r_{\text{nom}} = \ln(e^{r_{\text{nom}}}) = \underline{\ln(1 + r_{\text{eff}})}$$

Um verschiedene Nominalzinssatz-Verzinsungsperioden-Kombinationen vergleichen zu können, wird oft der Effektivzinssatz  $r_{\text{eff}}$ , oder aber auch der **äquivalente (nominelle) stetige Zinssatz**  $r_c$  ('c' für *continuously compounded*) für alle Kombinationen berechnet. Stetige Verzinsung ist auch in der Finanzmathematik beliebt, da stetige Modelle oft leichter zu handhaben sind als diskrete. Abschließend können wir die Kontostände nach  $n$  Jahren bei  $m$ -facher bzw. *stetiger Verzinsung* als

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^{n \cdot m} \quad \text{bzw.} \quad K_n = K_0 \cdot e^{n \cdot r_{\text{nom}}} \quad (2.14)$$

anschreiben.



**12** Auf ein Sparguthaben werden Zinsen gezahlt und der nominelle Zinssatz  $r_{\text{nom}}$  beträgt 8% p.a. Berechne den Unterschied zwischen nominellem und effektivem Zinssatz bei (a) quartalsmäßiger, (b) monatlicher und (c) stetiger Verzinsung.

**Lösung:** Im Fall quartalsmäßiger Verzinsung (a) beträgt der Verzinsungsfaktor  $(1 + 8\%/4)^4 = 1,0824$ , der Unterschied  $\Delta_4$  zwischen dem effektiven und nominellen Zinssatz beträgt somit  $\Delta_4 = 8,24\% - 8\% = 0,24\%$  p.a. In den Fällen (b) und (c) sind die Werte  $(1 + 8\%/12)^{12} = 1,0830$ , d.h.  $\Delta_{12} = 8,30\% - 8\% = 0,30\%$ , bzw.  $\exp(0,08) = 1,0833$ , d.h.  $\Delta_c = 8,33\% - 8\% =$

0,33. Der Unterschied steigt somit mit zunehmender Häufigkeit der Zinszahlungen in einem Jahr bis maximal 0,33% p.a.



**13** Kapital wird auf verschiedenen Konten (a) jährlich (nachsüssig), (b) quartalsmäßig oder (c) stetig verzinst. Der nominelle Zinssatz beträgt in jedem Fall 8%p.a. Nach wievielen Jahren erreicht der Kontostand (mindestens) €8.000 bei einem anfänglichen Kontostand von 1.000€?

**Lösung:** Das Beispiel könnte durch Probieren gelöst werden. Im Fall (a) kann man etwa die den Kontostand nach 27 Jahren mit  $1.000 \cdot (1 + 0,08)^{27} = 7.988,1$  und nach 28 Jahren mit  $1.000 \cdot (1 + 0,08)^{28} = 8.627,1$  berechnen. Daraus schließt man, dass nach 28 Jahren zum ersten Mal ein Kontostand von 8.000 (oder mehr) erreicht wird. Allerdings muss man schon eine Zeit lang probieren, um die richtigen kritischen Werte 27 bzw. 28 zu finden. Umgekehrt könnte man einfach die Gleichung aufstellen, dass der Kontostand nach  $n$  Jahren 8.000€ erreichen soll, d.h.  $1.000 \cdot (1 + 0,08)^n = 8.000$ . Wir erinnern uns an die Rechenregel für  $y_1 > 0$ , dass  $\ln(y_1^p) = p \cdot \ln(y_1)$ . Setzt man nun  $y_1 = 1,08 > 0$  und  $p = n$ , so können wir, nachdem wir die Gleichung durch 1.000 dividiert haben, den Logarithmusoperator auf beiden Seiten der Gleichung anwenden, um  $n \cdot \ln(1,08) = \ln(8)$  zu erhalten. Für  $n$  ergibt sich dann  $n = \frac{\ln(8)}{\ln(1,08)} = 27,02$ . Damit ist die kleinste ganze Zahl, für die ein Kapital von 8.000 oder mehr erreicht ist, die nächstgrößere, d.h. 28. Analog schließt man, dass bei vierteljährlicher Verzinsung, das Kapital nach  $n = \frac{1}{4} \frac{\ln(8)}{\ln(1+0,08/4)} = 26,252$  Jahren erreicht ist. Da die Zinsauszahlung vierteljährlich erfolgt, ist dies im darauffolgenden Quartal, d.h. nach 26 Jahren und 2 Quartalen, der Fall. Bei der stetigen Verzinsung ergibt sich  $\ln(\exp(0,08 \cdot n)) = 0,08 \cdot n = \ln(8)$ , sodass das gewünschte Kapital nach genau  $\ln(8)/0,08 = 25,99$  Jahren erreicht wird. Man sieht, dass für kleinere Verzinsungsperioden das Kapital schneller wächst, allerdings hält sich der Effekt hier in Grenzen.

**LI 13** **Lösung linearer Gleichungen:** Definiere den Begriff 'lineare Gleichung'. Besitzt eine lineare Gleichung immer eine Lösung? Ist diese eindeutig? Interpretiere die Lösung einer linearen Gleichung grafisch in der  $x - y$ -Ebene.

Eine **lineare Gleichung** hat die Form  $f(x) = 0$ , wobei  $f(x)$  eine *lineare Funktion* ist. D.h. eine lineare Gleichung hat die Form

$$a \cdot x + b = 0,$$

mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$ . Die Gleichung wird einfach gelöst, indem man dieselben Operationen auf beiden Seiten der Gleichung anwendet: zuerst zieht man von beiden Seiten  $b$  ab, danach dividiert man durch  $a$ . Die **eindeutige Lösung** (die für  $a \neq 0$  immer existiert) ist damit durch  $x = \frac{-b}{a}$  gegeben. Grafisch sieht man die Lösung, indem man die lineare Funktion  $y = f(x) = a \cdot x + b$  in der  $x - y$ -Ebene abbildet. Diese Abbildung hat die Form einer **Geraden**. Auf der Geraden gilt für  $y = 0$  auch  $a \cdot x + b = 0$ . Wir suchen also den  $x$ -Wert jenen Punktes auf der Geraden, für den  $y = 0$  gilt. Dies ist dort der Fall, wo die Gerade die Funktion  $y = 0$ , also die  $x$ -Achse, schneidet. Der Schnittpunkt hat die Koordinaten  $(-b/a; 0)$ , d.h. auf der Geraden gilt für  $x = -b/a$  auch  $y = f(-b/a) = 0$ .



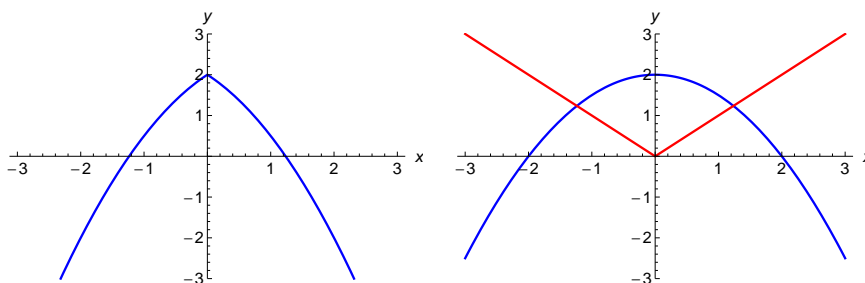
**14** Löse die Gleichung  $f(x) = 0$  mit  $f(x) = \frac{3}{7} \cdot x + 2 \cdot \pi$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:** Die Gleichung  $\frac{3}{7} \cdot x + 2 \cdot \pi = 0$  ist eine lineare Gleichung, da die Zahl  $\pi$  eine Konstante ist. Im Speziellen beschreibt die Konstante  $\pi$  das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem

Durchmesser. Wir subtrahieren  $2 \cdot \pi$  von beiden Seiten der Gleichung. Das liefert  $\frac{3}{7}x = -2 \cdot \pi$ . Dann dividieren wir beide Seiten durch  $\frac{3}{7}$ , was äquivalent zu einer Multiplikation mit  $\frac{7}{3}$  ist, und wir erhalten  $x = -2\pi \frac{7}{3} = -\frac{14\pi}{3}$ . Die **Lösungsmenge** der Gleichung ist somit  $\mathcal{L} = \{-14\pi/3\}$ .

**LI 14** **Graphische Lösung nicht-linearer Gleichungen:** Erkläre, wie man nicht-lineare Gleichungen grafisch lösen kann (z.B. wenn man entsprechende Funktionen plotten kann).

Gleichungen sind oft nicht-linear. Für einige nicht-lineare Gleichungsklassen sind Lösungsformeln bekannt (vgl. quadratische Gleichungen). Andere Gleichungen können oft nur schwer explizit gelöst werden. Nehmen wir an, wir hätten die Gleichung  $f(x) = 0$  mit  $f(x) = -0,5 \cdot x^2 + 2 - |x|$  zu lösen. Wir suchen also die **Nullstellen der Funktion**  $f(x)$  (d.h.  $x$ -Werte, für die  $f(x) = 0$ ). Dies ist in Abbildung 2.5 (links) Grafik illustriert, und wir können ablesen, dass die Funktion zwei Nullstellen hat, die ca. bei  $x_1 = -1,2$  und  $x_2 = 1,2$  liegen (die genauen Werte sind  $\pm 1,236$ ).



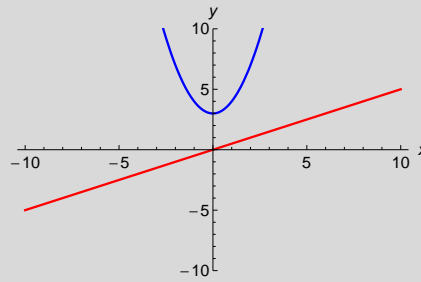
**Abbildung 2.5:** Grafische Nullstellen- bzw. Lösungssuche: die Fälle  $f(x) = 0$  (links) und  $f(x) = g(x)$  (rechts).

Alternativ kann man die Gleichung auch als  $-0,5 \cdot x^2 + 2 = |x|$  schreiben. Nun handelt es links und rechts um Funktionen die wir gut kennen - eine quadratische und eine Betragsfunktion. Das Zeichnen der beiden Funktionen fällt uns nun noch leichter, und die Lösungen liegen dort, wo beide Funktionen denselben **Funktionswert** haben, d.h. dort wo sie sich schneiden (vgl. Abbildung 2.5 (rechts)). Alternativ kann man numerische Methoden zur Lösung von Gleichungen verwenden (mit denen wir uns aber im Rahmen dieses Skriptums nicht beschäftigen können). Auch bei diesen **numerischen Methoden** ist es oft nützlich, eine erste Idee zu haben, wieviele Nullstellen es gibt und wo sie ungefähr liegen ('first guess' bzw. Startwert bei der Lösungsfindung); dabei können wiederum grafische Darstellungen helfen.



**15** Betrachte zwei Funktionen  $f(x) = x^2 + 2$  und  $g(x) = \frac{1}{2}x$ . Zeichne separat die Graphen von  $f(x)$  und  $g(x)$  und schätze die Lösungen der Gleichung  $f(x) = g(x)$  aus deiner Zeichnung.

**Lösung:** Wir plotten beide Funktionen und sehen, dass es keinen Schnittpunkt gibt. Somit existiert keine reelle Lösung und die Lösungsmenge ist die **leere Menge**,  $\mathcal{L} = \{\}$ .



Wir wollen dies noch nachprüfen und formen die Gleichung wie folgt um:

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2 &= 0,5 \cdot x \\
 \Leftrightarrow x^2 - 0,5 \cdot x + 2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(x^2 - 0,5 \cdot x + \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{16} + 2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{32} &= 0.
 \end{aligned}$$

Da das **vollständige Quadrat**  $(x - 1/4)^2$  immer  $\geq 0$  ist, ist die Summe aus diesem und der **positiven** Zahl  $31/32$  immer  $> 0$ .<sup>a</sup> Damit haben wir bestätigt, dass es keine reelle Lösung der Gleichung gibt.

<sup>a</sup>Das Zeichen ' $\Leftrightarrow$ ' vor den Gleichungen bedeutet, dass die Gleichungen jeweils durch **Äquivalenzumformungen** aus der jeweils oberen entstanden sind, d.h. eine Lösung der oberen ist auch eine der unteren Gleichung und umgekehrt. Die angewandte Technik im Beweis heißt **Vervollständigung auf ein Quadrat**. Wir wissen, dass  $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$  allgemein gilt. Demnach muss der Koeffizient von  $x$  die Zahl  $-2a$  sein, woraus im Beispiel  $-1/2 = -2a$  folgt, und somit  $a = 1/4$ . Damit fehlt noch  $a^2 = 1/16$  auf ein **vollständiges Quadrat**, und wenn wir die Zahl einmal zur linken Seite addieren und einmal subtrahieren, haben wir nichts verändert.

## 2.2.1 Differentialrechnung und lokale Extrema

**LI 15** **Differenzenquotient:** Erkläre den Begriff 'Differenzenquotient'.

Der **Differenzenquotient** einer Funktion  $f(x)$  über das Intervall  $[x_0; x_1]$ ,  $x_1 > x_0$ , ist als

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (2.15)$$

definiert und beschreibt, um wieviel die Funktion  $f(x)$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$  im Schnitt pro Einheit (nach rechts) wächst.



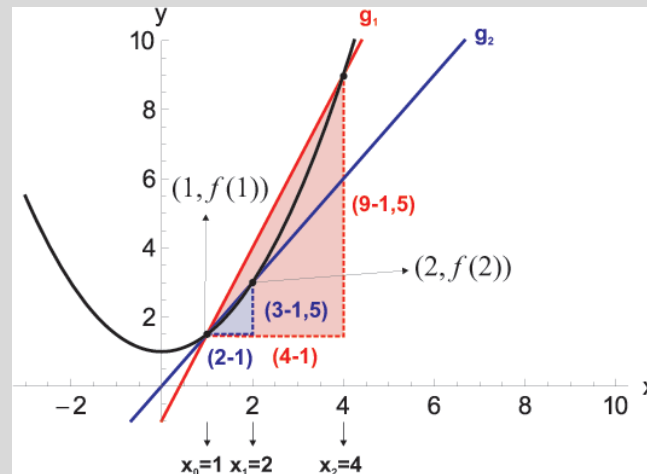
**16** Berechne die Differenzenquotienten der Funktion  $f(x) = 0,5 \cdot x^2 + 1$  auf den Intervallen  $[1; 4]$ ,  $[1; 2]$  und  $[1; 1,5]$ . Was bedeuten die jeweiligen Differenzenquotienten graphisch?

**Lösung:** Wir werten die Funktion an den entsprechenden Stellen aus und erhalten  $f(1) = 1,5$ ,  $f(1,5) = 0,5 \cdot 2,25 + 1 = 2,125$ ,  $f(2) = 3$  und  $f(4) = 9$ . Die Differenzenquotienten ergeben sich dann als

$$\frac{9 - 1,5}{4 - 1} = 2,5; \quad \frac{3 - 1,5}{2 - 1} = 1,5 \quad \text{und} \quad \frac{2,125 - 1,5}{1,5 - 1} = 1,25.$$

Eine Gerade, die durch zwei Punkte einer (Funktions-)Kurve geht, heißt **Sekante**. Die Sekanten  $g_1$  und  $g_2$  durch die Punkte  $(x_0 = 1; f(1))$  und  $(x_1 = 2; f(2))$  (blau) bzw.  $(x_2 = 4; f(4))$  (rot)

sind in der nachfolgenden Abbildung markiert.



Betrachtet man das blaue Dreieck, so erkennt man, dass man sich von  $(x_0, f(x_0))$  aus  $2-1 = 1$  Einheit nach rechts und  $3-1,5 = 1,5$  Einheiten nach oben bewegt, um in  $(x_1, f(x_1))$  zu landen, dem zweiten Punkt, der die Sekante definiert. Der *Differenzenquotient* beschreibt somit, wie weit nach oben pro einem Schritt nach rechts man gehen muss, um auf der Sekanten zu bleiben. D.h. der Differenzenquotient auf  $[x_0; x_1]$  misst die **Steigung der Sekante** durch den Graphen  $(x, f(x))$  in den Punkten  $x_0$  und  $x_1$ . Die rote Gerade bzw. das rote Dreieck illustrieren dasselbe für die Punkte  $x_0$  und  $x_2$ .

**LI 16** **Differentialquotient:** *Definiere den Begriff 'Differentialquotient'. Was ist die Verbindung zum Differenzenquotient? Was ist der Differentialquotient graphisch?*

Betrachte die Definition des Differenzenquotienten einer stetigen Funktion  $f(x)$ . Im Grenzfall, wenn das  $x_1$  immer näher an  $x_0$  heranrückt, d.h.  $\Delta x = x_1 - x_0$  gegen Null geht, sprechen wir vom **Differentialquotienten** (wenn er existiert)

$$\lim_{x_1 - x_0 \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (2.16)$$

Man nennt den Differentialquotienten auch **1. Ableitung der Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$**  und schreibt  $f'(x_0)$  oder  $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ .<sup>6</sup> Graphisch gesehen ist der Differentialquotient der Funktion  $f(x)$  in  $x_0$  die **Steigung der Tangente an  $f(x)$  für  $x = x_0$**  (vgl. graphische Interpretation des Differenzenquotienten). Das ist in Abbildung 2.6 für  $f(x) = 0,5 \cdot x^2 + 1$  und  $x_0 = 1$  dargestellt.



**17** Berechne die Differentialquotienten von (a)  $f(x) = 2 \cdot x + 1$  und (b)  $g(x) = 0,5 \cdot x^2 + 1$ , jeweils im Punkt  $x = x_0 = 1$ .

**Lösung:** Im Fall (a) ergibt sich<sup>a</sup>

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (1 + \Delta x) + 1 - (2 \cdot 1 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \Delta x}{\Delta x} = 2$$

<sup>6</sup>Genau genommen definiert Formel (2.16) einen *rechtsseitigen Differentialquotienten*  $f'_+(x_0)$ , d.h. wir sehen uns nur den Grenzwert für  $x_1$  von rechts gegen  $x_0$  an (d.h.  $x_1 > x_0$ ). Generell definieren wir eine Funktion als **differenzierbar in  $x_0$** , wenn die Funktion (a) stetig ist und (b) die Grenzwerte des rechts- bzw. linksseitigen Differenzenquotienten existieren und (c) gleich sind. Das ist eine mathematische Bedingung dafür, dass die Funktion in  $x_0$  'glatt' ist, d.h. keine Ecke und keine Sprungstelle hat.

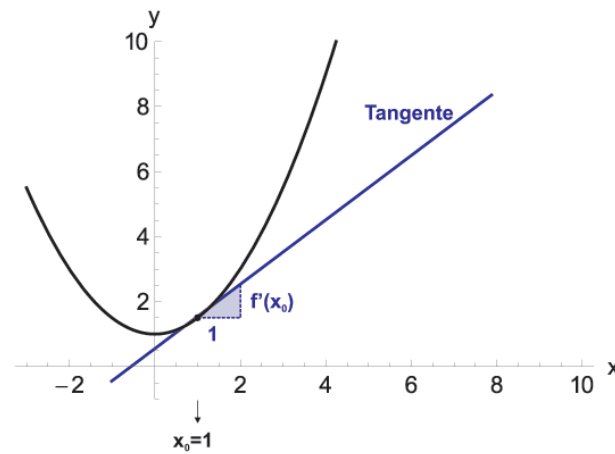


Abbildung 2.6: Tangente in  $x_0$  an  $f(x)$  und Differentialquotient  $f'(x_0)$  als Steigung der Tangente.

und im Fall (b) berechnen wir

$$g'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1 + \Delta x)^2 + 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}((\Delta x)^2 + 2\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2}\Delta x + \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Vergleiche das Ergebnis von Fall (b) mit Abbildung 2.6.

<sup>a</sup>Die folgenden Regeln gelten bei der Limesberechnung mit  $\Delta x \rightarrow 0$ : (a)  $\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$  durch Kürzen von Zähler und Nenner durch  $\Delta x$ , (b)  $\frac{\Delta x}{1} \rightarrow 0$  und (c)  $\frac{1}{\Delta x} = \infty$  (in diesem letzten Fall existiert kein endlicher Grenzwert).

**LI 17** 1. und 2. Ableitung einer Funktion: Erkläre die Begriffe '1. Ableitung' und '2. Ableitung einer Funktion  $f(x)$ .

Die 1. Ableitung einer (stetigen und differenzierbaren) Funktion, ist die Abbildung von  $x$  auf den Differentialquotienten der Funktion  $f$  im Punkt  $x$ . Man schreibt kurz  $f'(x) : x \mapsto \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ . Analog ist die 2. Ableitung einer (stetigen und zweifach differenzierbaren) Funktion die Abbildung von  $x$  auf den Differentialquotienten der 1. Ableitung der Funktion  $f(x)$ . Man schreibt kurz  $f''(x)$ .<sup>7</sup>



**18** Berechne die 1. Ableitung von (a)  $f(x) = 2 \cdot x + 1$  und (b)  $g(x) = 0,5 \cdot x^2 + 1$ .

**Lösung:** Im Fall (a) ergibt sich

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (x + \Delta x) + 1 - (2 \cdot x + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \Delta x}{\Delta x} = 2$$

und im Fall (b) berechnen wir

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 + 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}((\Delta x)^2 + 2x\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2}\Delta x + \frac{x\Delta x}{\Delta x} = x. \end{aligned}$$

Vergleiche das Ergebnis mit dem vorherigen Beispiel.

**LI 18** **Ableitungsregeln:** Erkläre die Ableitungsregeln (a) für die Polynom-, Exponential- und Logarithmusfunktion, und (b) die Summen-, Produkt und Kettenregel bei der Ableitung.

<sup>7</sup>Bei wiederholter Anwendung des Differentialoperators kommt man so zur  $n$ -ten Ableitung der (stetigen und  $n$ -fach differenzierbaren) Funktion  $f(x)$ , nämlich  $f^{(n)}(x)$ .



Man kann für eine Reihe von uns bereits bekannten Funktionen die Ableitungsfunktion berechnen. Einige Regeln sind nun hier angeführt:

- **Konstanter Multiplikator:**  $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .
- **Potenzfunktion:**  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Diese Regel lässt sich auf ganzzahlige  $n \in \mathbb{Z}$ , bzw. auf reelle  $n \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$ , erweitern.
- **Exponentialfunktion:**  $(\exp(x))' = \exp(x)$ , d.h. die Ableitung einer Exponentialfunktion ist wieder dieselbe Exponentialfunktion. Daraus folgt, dass auch die 2., 3., etc. Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ist.
- **Logarithmusfunktion:**  $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .
- **Summenregel:** ist die Funktion  $f(x) = u(x) + v(x)$  die Summe aus zwei Summanden, so gilt  $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ . Dies ist erweiterbar auf beliebig viele Summanden.
- **Polynomfunktion:**  $(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)' = n \cdot a_n x^{n-1} + \dots + a_1 = \sum_{j=1}^n j \cdot a_j \cdot x^{j-1}$ . Diese Regel ergibt sich aus der Kombination von Potenz- und Summenregel.
- **Produktregel:** ist die Funktion  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$  das Produkt aus zwei Faktoren, so gilt  $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ .
- **Quotientenregel:** ist die Funktion  $f(x) = u(x)/v(x)$  ein Quotient aus zwei Funktionen, so gilt unter geeigneten Bedingungen, dass

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v'(x))^2}.$$

- **Kettenregel:** es sei  $f(x) = u(v(x))$  eine verkettete Funktion, so gilt  $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$  (Ann. beide Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$  sind differenzierbar).



**19** Bilde die jeweilige 1. Ableitung der Funktionen (a)  $f(x) = e^x \cdot \ln(x)$ , (b)  $g(x) = \exp(x + 3 + \ln(2 \cdot x))$ , (c)  $h(x) = (3 \cdot \exp(0,5x)) \cdot (\ln(x) + 1)$  und (d)  $i(x) = 2x^5 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ .

**Lösung:** Im Fall (a) erhält man durch einfache Anwendung der Produktregel mit  $u(x) = e^x$  und  $v(x) = \ln(x)$ , dass

$$f'(x) = e^x \cdot \ln(x) + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \cdot \left( \ln(x) + \frac{1}{x} \right).$$

Für Fall (b) benötigen wir die Kettenregel, einmal außen mit  $u(x) = \exp(x)$  und  $v(x) = x + 3 + \ln(2 \cdot x)$  (und einmal innen für  $(\ln(2 \cdot x))'$ ), und die Summenregel, und wir erhalten

$$g'(x) = \exp(x + 3 + \ln(2 \cdot x)) \cdot \left( 1 + \frac{1}{2 \cdot x} \cdot 2 \right) = \exp(x + 3 + \ln(2 \cdot x)) \cdot \left( 1 + \frac{1}{x} \right).$$

Fall (c) ist eine Kombination aus Produkt- und Kettenregel,

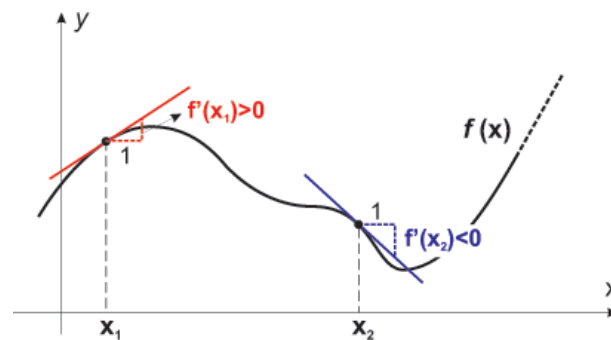
$$h'(x) = (3 \cdot \exp(0,5x) \cdot 0,5) \cdot (\ln(x) + 1) + (3 \cdot \exp(0,5x)) \cdot \frac{1}{x}.$$

Fall (d) ist schlussendlich die Ableitung eines Polynoms und man erhält

$$i'(x) = 5 \cdot 2 \cdot x^{5-1} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 = 10 \cdot x^4 - x.$$

**LI 19** Die Ableitung und Monotonieverhalten: Welchen Wert hat die 1. Ableitung einer Funktion  $f(x)$  in Punkten in denen sie (a) streng monoton fallend bzw. (b) streng monoton steigend ist?

Wir beobachten in Abbildung 2.7, dass die Funktion in  $x_1$  (lokal) streng monoton steigend ist, in  $x_2$  hingegen ist die Funktion streng monoton fallend. Legen wir die Tangenten durch diese Funktionspunkte, wie in der Abbildung illustriert, so hat die Tangente in  $x_1$  eine positive Steigung, während die Tangentensteigung für  $x = x_2$  negativ ist. Wir erinnern uns, dass die Steigung der Tangente im Punkt  $x = x$  gleich  $f'(x)$  ist. Damit ist die Funktion (lokal) **streng monoton steigend**, wenn  $f'(x) > 0$  und **streng monoton fallend**, wenn  $f'(x) < 0$ .



**Abbildung 2.7:** Die Tangente an die Funktion  $f(x)$  weist für  $x = x_1$  eine positive Steigung ( $f'(x_1) > 0$ ) auf, für  $x = x_2$  ist die Tangentensteigung negativ  $f'(x_2) < 0$ .

**LI 20** Die Ableitung und lokale Minima/Maxima: Definiere die Begriffe lokales vs. globales Minimum/Maximum. Was ist ein Sattelpunkt? Wie lautet die notwendige Ableitungsbedingung für ein lokales Minimum/Maximum?

Wie in Abbildung 2.8 dargestellt, steigt eine Funktion bis in ein **lokales Maximum**  $x_0$  und fällt danach ab. Im Punkt selbst ist die Tangente horizontal (d.h. sie hat Steigung 0) und es gilt  $f'(x_0) = 0$ . Die Funktion fällt ins **lokale Minimum**  $x = x_2$  und steigt direkt danach an. Wir beobachten eine Übergang von monoton fallend zu monoton steigend; im Minimum (hier:  $x = x_2$ ) selbst ist die Tangente wieder horizontal und es gilt  $f'(x_2) = 0$ . Die dritte Möglichkeit, eine horizontale Tangente zu beobachten, ist in einem **Sattelpunkt** (hier: für  $x = x_1$ ), die Funktion fällt (oder: steigt) unmittelbar vor und nach dem Sattelpunkt. Wir fassen zusammen: beobachten wir, dass lokal  $f'(x_{lok}) = 0$  gilt, so liegt im Punkt  $x = x_{lok}$  ein (a) lokales Minimum, (b) lokales Maximum oder (c) ein Sattelpunkt vor. Man sagt auch:  $f'(x_{lok}) = 0$  ist eine **notwendige Bedingung** für ein lokales Maximum bzw. lokales Minimum bzw. für einen Sattelpunkt.<sup>8</sup>

Bis jetzt haben wir die Begriffe *lokales* Minimum bzw. Maximum verwendet. Ein **globales Minimum** bzw. **Maximum** ist der tiefste bzw. höchste Punkt einer Funktion auf dem Definitionsbereich. In Abbildung 2.8, beispielsweise, ist  $x = x_0$  ein lokales, aber *kein globales* Maximum, da die Funktion rechts über  $f(x_0)$  hinaus steigt.

<sup>8</sup>Konkret gilt: im Punkt  $x = x_{lok}$  mit  $f'(x_{lok}) = 0$  liegt (a) ein lokales Maximum vor, wenn  $f''(x_{lok}) < 0$ , (b) ein Sattelpunkt wenn  $f''(x_{lok}) = 0$  und (c) ein lokales Minimum wenn  $f''(x_{lok}) > 0$ . Die zweite Ableitung ist auch als **Krümmung** bekannt. Stellt man sich vor, dass man in einem Auto sitzt, und von links nach rechts auf der Funktionskurve von  $f(x)$  fährt, so bedeutet  $f''(x_{lok}) < 0$ , dass das Lenkrad nach rechts eingeschlagen ist, und umgekehrt ist es nach links eingeschlagen wenn  $f''(x_{lok}) > 0$ .

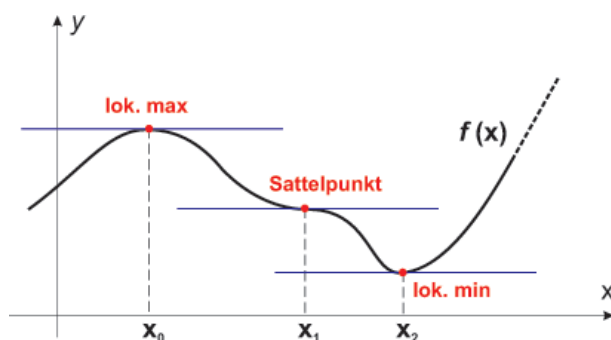
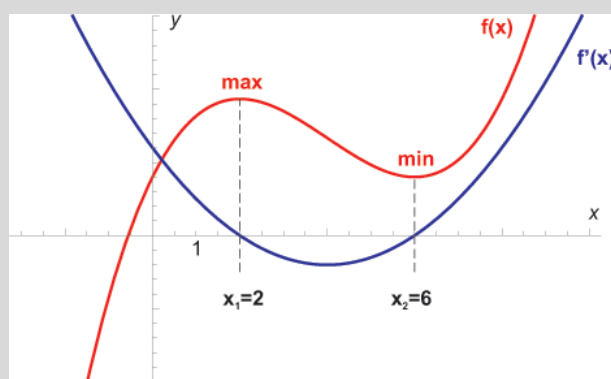


Abbildung 2.8:  $f'(x) = 0$  als notwendige Bedingung für lokale Minima, Maxima bzw. Sattelpunkte.



20 Untersuche die Funktion  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 8$  auf lokale Minima/Maxima bzw. Sattelpunkte.

**Lösung:** Wir bestimmen die erste Ableitung als  $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 12 = x^2 - 8 \cdot x + 12 = (x - 2) \cdot (x - 6)$ . Die Funktion  $f(x)$  ist daher eine quadratische Funktion, die Nullstellen für  $x_1 = 2$  und  $x_2 = 6$  hat, wie in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.



Aus der Form  $f'(x) = (x - 2) \cdot (x - 6)$  können wir leicht schließen, dass  $f'(1,9) > 0$  (negativ *mal* negativ) und  $f'(2,1) < 0$  (positiv *mal* negativ) bzw.  $f'(5,9) < 0$  und  $f'(6,1) > 0$ . Kurz vor  $x = 2$  steigt die Funktion, danach fällt sie, somit hat sie in  $x = 2$  ein lokales Maximum. Umgekehrt fällt die Funktion vor  $x = 6$  und steigt danach, sodass  $f(x)$  in  $x = 6$  ein lokales Minimum hat. Alternativ hätten wir  $f''(2) < 0$  und  $f''(6) > 0$  auswerten können (siehe vorherige Fußnote). Die Funktion nimmt höhere Werte (rechts) als im lokalen Maximum, und niedrigere Werte (links) als im lokalen Minimum, somit sind die beiden lokalen **Extremwerte** nicht *global*.

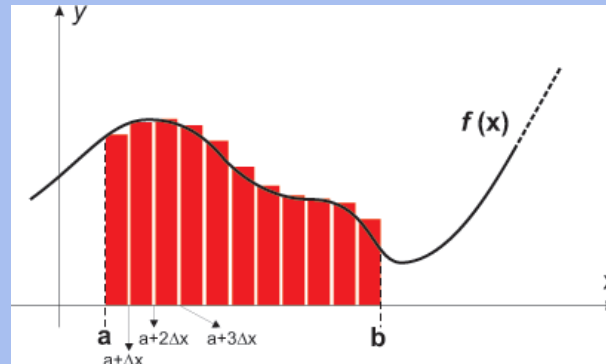
## 2.2.2 Integralrechnung

**LI 21** Das Riemann'sche Integral: Erkläre den Riemann'schen Integralbegriff. Was ist die graphische Interpretation des Integrals  $\int_a^b f(x) dx$  für stetiges  $f(x)$ ?



Wollen wir die Fläche (wir nennen sie  $I$ ) unter einer stetigen Funktion  $f(x)$  über einem Intervall  $[a; b]$  annähern (auch: **approximieren**), so können wir wie folgt vorgehen: wir teilen das Intervall  $[a; b]$  in  $n$  gleich lange Teilintervalle auf, die alle die Länge  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  haben. Wir spannen dann über dem  $k$ -ten Teilintervall  $[a + (k - 1) \cdot \Delta x; a + k \cdot \Delta x]$  das Rechteck auf, das  $\Delta x$  breit ist und  $f(a + (k - 1) \cdot \Delta x)$  lang ist. Dies ist in der nachfolgenden Abbildung dargestellt

(zur Vereinfachung der Interpretation ist die Funktion *positiv*).

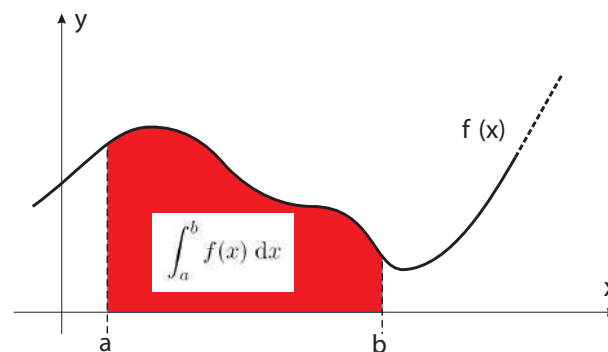


Addieren wir nun die Flächen aller Rechtecke (jeweils: Länge *mal* Breite) auf, so haben wir die Fläche unter der Funktion  $f(x)$  approximiert. Man kann das für genügend großes  $n$  folgendermaßen anschreiben:

$$F \cong f(a) \cdot \Delta x + f(a + \Delta x) \cdot \Delta x + \dots + f(a + (n-1) \cdot \Delta x) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^n f(a + (k-1) \cdot \Delta x) \cdot \Delta x. \quad (2.17)$$

Je größer wir  $n$  werden lassen, desto kleiner wird  $\Delta x$  - die Rechtecke werden dabei immer schmaler, die Approximation der Fläche  $F$  wird zunehmend besser. Im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  schreiben wir  $\int$  (Integral) statt  $\Sigma$  (Summe),  $dx$  (das 'Differential') statt  $\Delta x$  und den jeweiligen Funktionswert  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , statt den diskreten Werten  $f(a + k \cdot \Delta x)$  und wir erhalten das **Riemann'sche Integral** von  $f(x)$  zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$  als

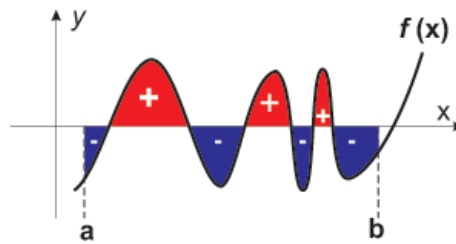
$$F = \int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(a + (k-1) \cdot \Delta x) \cdot \Delta x. \quad (2.18)$$



**Abbildung 2.9:** Riemann'sches Integral als geometrische Fläche.

Das *bestimmte Integral* mit den Grenzen  $a$  und  $b$  ist demnach die **Fläche unter der (positiven stetigen) Funktion  $f(x)$  zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$** , das ist in Abbildung 2.9 (rechts) dargestellt. Ist die Funktion  $f(x)$  zwar stetig, aber nicht durchgehend positiv zwischen  $a$  und  $b$  (vgl. Abbildung 2.10), so ist das bestimmte Integral  $\int_a^b f(x)$  die Summe aller Teilflächen oberhalb der  $x$ -Achse (hier: rot) *minus* die Summe aller Teilflächen unterhalb der  $x$ -Achse (hier: blau).

**LI 22** **Stammfunktion und Hauptsatz der Integralrechnung:** Wann ist  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$ ? Wie berechnet man die Fläche zwischen  $a$  und  $b$  mittels der Stammfunktion?



**Abbildung 2.10:** Bestimmtes Integral von  $f(x)$  als Summe der Flächen oberhalb der  $x$ -Achse minus Summe der Flächen unterhalb der  $x$ -Achse.

Die Funktion  $F(x)$  ist eine **Stammfunktion** von  $f(x)$  wenn die Ableitung von  $F(x)$  gleich  $f(x)$  für alle  $x$  im Definitionsbereich ist, d.h. wenn  $F'(x) = f(x)$  gilt. Wir erinnern uns, dass die Ableitung einer Konstanten gleich Null ist, somit gilt, dass  $F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , automatisch auch eine Stammfunktion ist. Oft schreibt man auch das **unbestimmte Integral** (d.h. ohne Integrationsgrenzen  $a$  und  $b$ )  $\int f(x) dx = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  an, und meint damit die Menge all dieser Stammfunktionen. In der Praxis ist es nicht immer leicht, die Stammfunktion einer Funktion  $f(x)$  zu finden.<sup>9</sup> Ein zentrales Resultat ist der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**. Er bringt die Stammfunktion in Zusammenhang mit dem bestimmten Integral (also der Fläche unter der Funktion). Im Speziellen besagt er für stetiges  $f(x)$ , dass

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2.19)$$

Statt  $F(b) - F(a)$  schreibt man auch oft  $[F(x)]_{x=a}^b$  oder  $F(x)|_{x=a}^b$ .

Integration ist eine Kerntechnik in der Finanz- und Versicherungsmathematik, so z.B. bei der Berechnung von erwarteten Versicherungsforderungen innerhalb eines Modells, beim stetigen Verzinsen (oder: Diskontieren) von Kapital oder bei der Berechnung von Risikomaßen (wie etwa dem Value-at-Risk). Wir werden, bis auf ein paar einfache Integrationsregeln, nicht weiter in die Tiefe der Integralrechnung gehen. Als wesentlichen Punkt sollte man sich allerdings merken, dass das Integral (wie hier: im Riemann'schen Sinn) der Grenzwert einer Summe ist und (im *bestimmten* Fall) geometrisch eine Fläche darstellt.

**LI 23** **Einige (wenige) Integralregeln:** Erkläre (a) die Integration der Polynom-, Exponential- und Logarithmusfunktion, sowie (b) die Summenregel und die partielle Integration.

Nun werden einige ausgewählte Integrationsregeln angeführt. Da das *Integrieren* im Grunde die Umkehroperation des *Differenzierens* ist, kommt man durch Ableiten des unbestimmten Integrals  $\int f(x) dx = F(x) + c$  bzw. der Stammfunktion  $F(x)$  wieder zur ursprünglichen Funktionen  $f(x)$ .

- **Konstanter Multiplikator:**  $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Sitzt der Multiplikator in der Funktion, so ergibt sich  $\int f(a \cdot x) dx = \frac{1}{a} F(a \cdot x) + c$ . Die Verifikation ergibt sich aus der Kettenregel der Differentiation.
- **Summenregel:** ist die Funktion  $f(x) = u(x) + v(x)$  die Summe aus zwei Summanden, so gilt  $\int f(x) dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx$ . Dies ist erweiterbar auf beliebig viele Summanden.

<sup>9</sup>Die Existenz ist jedoch gesichert, da  $\inf_a^x f(s) ds$  für jedes  $a$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  ist. Das sei jedoch nur am Rande angemerkt.

- **Exponentialfunktion:**  $\int \exp(x) dx = \exp(x) + c$ , d.h. das Integral der Exponentialfunktion ist wieder die Exponentialfunktion.
- **Logarithmusfunktion:**  $\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + c$ . Dies können wir mittels der Produktregel verifizieren, da  $(x \cdot \ln(x) - x + c)' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) \checkmark$ .
- **Potenzfunktion:**  $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} + c$ ,  $p \neq -1$ .
- **Polynomfunktion:**  $\int a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c = c + \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{j+1} \cdot x^{j+1}$ . Diese Regel ergibt sich aus der Kombination von Potenz- und Summenregel.
- **Umgekehrte Produktregel (auch: partielle Integration):**  $F(x)$  und  $G(x)$  seien die Stammfunktionen von  $f(x)$  und  $g(x)$ . Dann gilt:  $F(x) \cdot G(x) = \int f(x) \cdot G(x) dx + \int F(x) \cdot g(x) dx$ .<sup>10</sup>



**21** Berechne die folgenden Integrale: (a)  $\int e^{2x} + \frac{1}{2}x^3 dx$ , (b)  $\int_0^2 e^{-x} dx$  und (c)  $\int_0^\infty x \cdot e^{-x} dx$ .

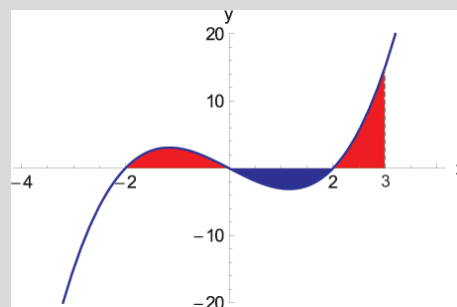
**Lösung:** Im Fall (a) ergibt sich  $\int e^{2x} + \frac{1}{2}x^3 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{8}x^4 + c$  mit  $c \in \mathbb{R}$  (Anm. ohne 'c' ist das Ergebnis zwar eine spezielle Stammfunktion, das unbestimmte Integral ist aber als Menge aller Stammfunktionen definiert). Fall (b) ist ein bestimmtes Integral. Wir erhalten  $\int_0^2 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{x=0}^2 = -e^{-2} - (-e^0) = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0,865$ . Fall (c) erfordert partielle Integration mit  $F(x) = x$  und  $g(x) = e^{-x}$ :  $\int_0^\infty x \cdot e^{-x} dx = x \cdot (-e^{-x}) \Big|_{x=0}^\infty - \int_0^\infty 1 \cdot (-e^{-x}) dx = 0 - e^{-x} \Big|_{x=0}^\infty = 1$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Fall (c) ist nicht ganz trivial. Wir erinnern uns, dass  $e^0 = 1$ . Zusätzlich benötigen wir, dass  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x} = 0$  ( $e^{-x}$  geht 'schneller' gegen 0, als  $x$  gegen unendlich). Zur Erinnerung für 'fortgeschrittene MathematikerInnen': dies kann mit der **Grenzwertregel von de L'Hôpital** gezeigt werden. An späterer Stelle werden wir sehen, dass (b) der Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}[0 < X < 2]$  und (c) dem Erwartungswert  $\mathbb{E}[X]$ , beide mit  $X \sim \text{Exp}(1)$ , entspricht.



**22** Berechne die Fläche zwischen der Funktion  $f(x) = x^3 - 4x$  über dem Intervall  $[-2; 3]$

**Lösung:** Wir schreiben die die Funktion um als  $f(x) = x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$  und plotten den Graphen.



Die Nullstellen liegen folglich bei  $\{-2; 0; 2\}$ . Nachdem wir die Gesamtfläche über dem Intervall  $[-2; 3]$  berechnen wollen, müssen wir die Fläche, die unter der  $x$ -Achse liegt (und im Integral negativ gewichtet ist), positiv machen (d.h. den Absolutbetrag davon nehmen). Bei der Integration unterscheiden wir deshalb die Fälle  $[-2; 0]$ ,  $[0; 2]$  und  $[2; 3]$ . Die Fläche  $F$  berechnen

<sup>10</sup>Im Fall des bestimmten Integrals gilt  $F(x) \cdot G(x) \Big|_{x=a}^b = \int_a^b f(x) \cdot G(x) dx + \int_a^b F(x) \cdot g(x) dx$ .

wir dann als

$$\begin{aligned} F &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \left| \int_0^2 f(x) dx \right| + \int_2^3 f(x) dx \\ &= \left. \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right|_{x=-2}^0 - \left. \left( \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \right|_{x=0}^2 + \left. \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right|_{x=2}^3 = 14,25. \end{aligned}$$

## 2.3 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

**LI 24** **2×2 lineares Gleichungssystem:** Definiere ein 2×2 lineares Gleichungssystem.

Bei vielen ökonomischen Problemen müssen mehrere Gleichungsbedingungen in verschiedenen Variablen  $x_1, x_2, x_3, \dots$  gleichzeitig zutreffen, sodass man zur Lösung des Problems ein sogenanntes **Gleichungssystem** lösen muss. Bei unserer Diskussion von Funktionen hatten wir im Grunde bisher nur eine Variable  $x$ ; im folgenden Beispiel werden es 2 Variablen,  $x_1$  und  $x_2$ , sein. Wir beschäftigen uns mit dem einfachsten Fall des **linearen Gleichungssystems**. 'Linear' deshalb, weil alle Variablen ( $x_1, x_2, x_3, \dots$ ) nur linear vorkommen (d.h. in den Gleichungen kommen keine nicht-linearen Funktionen (wie z.B.,  $x_1^2, x_2^2, \exp(x_1)$  oder  $\ln(x_2)$ ) vor). Ein  $2 \times 2$  ('zwei mal zwei') Gleichungssystem kann wie folgt angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \text{(I): } & a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 = b_1 \\ \text{(II): } & a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 = b_2, \end{aligned} \tag{2.20}$$

wobei  $a_{m,n} \in \mathbb{R}$  der *Koeffizient* der  $n$ -ten Variable  $x_n$  in der  $m$ -ten Zeile ist. Die *Parameter*  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  können in konkreten Beispielen beliebige reelle Werte annehmen.

**LI 25** **Lösung von 2×2 linearem Gleichungssystem:** Was ist die obere Dreiecksform eines linearen Gleichungssystems? Erkläre einen Algorithmus, um ein  $2 \times 2$  lineares Gleichungssystem aufzulösen.

Um (2.20) aufzulösen, muss man Werte  $(x_1, x_2)$  finden, sodass *beide* Gleichungen gleichzeitig erfüllt sind. Sprechen wir von einem **Lösungsvektor**, so schreiben wir die Einträge im **Dupel**  $(x_1, x_2)$  untereinander an, d.h.  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .<sup>11</sup> Löst ein Dupel (bzw. im allgemeinen Fall:  $n$ -Tupel) das *Gleichungssystem*, so löst sie auch

- das  $c$ -fache einer Gleichung (z.B.  $c \cdot a_{1,1} \cdot x_1 + c \cdot a_{1,2} \cdot x_2 = c \cdot b_1$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ) und
- die *Summe* von Gleichungen (z.B.  $(a_{1,1} + a_{2,1}) \cdot x_1 + (a_{1,2} + a_{2,2}) \cdot x_2 = b_1 + b_2$ ).

Um eine Systematik bei der Lösung von (2.20) zu entwickeln dürfen wir deshalb (M1) Gleichungen mit einer Konstanten multiplizieren, (M2) Gleichungen addieren und (M3) ein Vielfaches einer Gleichung

<sup>11</sup>Allgemein verstehen wir unter einem **Vektor**  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  ein  $n$ -Tupel in dem jede der  $n$  Komponenten (bzw. *Koordinaten*) eine reelle Zahl ist. Meistens werden die Zahlen untereinander dargestellt. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}$  heißt **Dimension des Vektors**. Die Beispiele

$$\text{(a) } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ (b) } \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \text{ (c) } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

stellen (a) einen 2-dimensionalen, (b) einen 3-dimensionalen und (c) einen allgemeinen  $n$ -dimensionalen Vektor,  $x_j \in \mathbb{R}$  und  $1 \leq j \leq n$ , dar.

zu einem Vielfachen einer anderen Gleichung addieren.<sup>12</sup>

Die Idee ist nun, das System in eine **obere Dreiecksform**<sup>13</sup> (oder: **Zeilen-Stufen-Form**) mit Hilfe der erlaubten Operationen (M1), (M2) und (M3) umzuformen. Konkret gehen wir wie folgt vor: statt Gleichung (II) erzeugen wir eine neue Gleichung, in der der Koeffizient von  $x_1$  (der unter der Hauptdiagonale liegt) gleich 0 ist. Das schaffen wir indem wir das  $a_{2,1}/a_{1,1}$ -fache der ersten Gleichung von der zweiten Gleichung abziehen. Das neue (äquivalente) System lautet dann

$$\begin{aligned} \text{(I)} : \quad & a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 = b_1 \\ \text{(II)} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot \text{(I)} : \quad & 0 \cdot x_1 + \left(a_{2,2} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot a_{1,2}\right) x_2 = b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot b_1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Das System kann nun *von unten nach oben gelöst werden*. In der zweiten Gleichung kommt nur noch  $x_2$  vor. Damit dividieren wir durch den Koeffizienten  $a_{2,2} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot a_{1,2} \neq 0$  von  $x_2$  und erhalten die Lösung für  $x_2$ . Wir setzen den Wert für  $x_2$  in die erste Gleichung (oben) ein und lösen diese nach  $x_1$  auf. Damit haben wir **eine eindeutige Lösung**  $(x_1^*, x_2^*)$  systematisch berechnet.



**Achtung:** Ist der *neue* Koeffizient von  $x_2$  gleich 0, haben wir *keine eindeutige Lösung*. Speziell gilt:

- für  $a_{2,2} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot a_{1,2} = 0$  und  $b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot b_1 = 0$  (d.h. die zweite neue Gleichung hat die Form  $0 = 0$ ): es gibt *unendlich viele* Lösungspaare  $(x_1, x_2)$ , die  $x_1 \in \mathbb{R}$  und  $x_2 = \frac{1}{a_{1,2}} \cdot (b_1 - a_{1,1} \cdot x_1)$  erfüllen. Graphisch ist die Lösungsmenge eine Gerade in der  $x_1 - x_2 - Ebene$  (d.h. in der  $x - y$ -Ebene mit  $y = x_2$ ), man sagt auch die beiden Ausgangsgleichungen sind **linear abhängig**,
- für  $a_{2,2} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot a_{1,2} = 0$  aber  $b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot b_1 \neq 0$  (d.h. die zweite neue Gleichung hat z.B. die Form  $0 = 4$ , d.h. wir haben einen Widerspruch erhalten): es gibt *keine* Lösung, die Lösungsmenge ist die leere Menge,  $\mathcal{L} = \{\}$

Die systematische Lösung von größeren  $n \times n$  linearen Gleichungssystemen funktioniert analog; man erzeugt die obere Dreiecksform und löst von unten nach oben auf. Wir werden dies später am Beispiel  $3 \times 3$  demonstrieren.



**23** Löse das System

$$\begin{aligned} \text{(I)} : \quad & 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 4 \\ \text{(II)} : \quad & 4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 = -2, \end{aligned}$$

für  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  auf.

**Lösung:** Wir transformieren das System wie oben beschrieben auf eine obere Dreiecksform. Die neue zweite Zeile ist die alte zweite Zeile, minus  $(a_{2,1}/a_{1,1}) = 4/2 = 2$  mal die alte erste Zeile.

$$\begin{aligned} \text{(I)} : \quad & 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 4 \\ \text{(II)} - 2 \cdot \text{(I)} : \quad & \underbrace{(4 - 2 \cdot 2)}_0 \cdot x_1 + (-4 - 2 \cdot 3) \cdot x_2 = -2 - 2 \cdot 4, \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Dabei müssen wir aufpassen, dass wir die anfängliche Information erhalten, indem jede Anfangsgleichung in einer Form in die 'neuen' Gleichungen eingehen.

<sup>13</sup>In einer oberen Dreiecksform sind alle Koeffizienten *unter der Hauptdiagonale* gleich 0. Speziell gilt dabei  $a_{i,j} = 0$  für alle  $j > i$ .



Die neue zweite Zeile ist äquivalent zu  $-10 \cdot x_2 = -10$ , und man löst  $x_2 = 1$ . Dieser Wert wird in die erste Zeile eingesetzt und es ergibt sich, dass

$$(I) : 2 \cdot x_1 + 3 \cdot 1 = 4.$$

Damit muss  $x_1 = 0,5$  gelten. Die *eindeutige* Lösung des Gleichungssystems ist somit  $\mathcal{L} = \{(0,5; 1)\}$ . Durch Einsetzen der Werte in beide ursprüngliche Gleichungen kann man die Richtigkeit der Lösung überprüfen.



**24** Löse das System

$$\begin{aligned} (I) : & 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 8 \\ (II) : & 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = 5 \\ (III) : & x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 = -1 \end{aligned}$$

für  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  auf.

**Lösung:** Analog zum vorigen Beispiel erzeugen wir die *obere Dreiecksform*. Wir arbeiten *von links nach rechts*, und erzeugen so im  $k$ -ten Schritt Nullen in der  $k$ -ten Spalte unter der Hauptdiagonale (d.h. 0-Koeffizienten für  $x_k$  in den Zeilen  $k+1$ ,  $k+2$ , etc.). (1) Im ersten Schritt erzeugen wir Null-Koeffizienten für  $x_1$  in der zweiten und dritten Zeile.

$$\begin{aligned} (I) : & 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 8 \\ (II) - 2 \cdot (I) : & 0 \cdot x_1 + (-2 - 2 \cdot 3) \cdot x_2 + (1 - 2 \cdot (-1)) \cdot x_3 = 5 - 2 \cdot 8 \\ (III) - \frac{1}{2} \cdot (I) : & 0 \cdot x_1 + (-1 - \frac{1}{2} \cdot 3) \cdot x_2 + (2 - \frac{1}{2}(-1)) \cdot x_3 = -1 - \frac{1}{2}8 \end{aligned}$$

Wir können die *Koeffizienten* wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} (I) : & 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 8 \\ (II) - 2 \cdot (I) : & 0 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = -11 \\ (III) - \frac{1}{2} \cdot (I) : & 0 \cdot x_1 - \frac{5}{2} \cdot x_2 + \frac{5}{2} \cdot x_3 = -5 \end{aligned}$$

(2) Im zweiten Schritt erzeugen wir einen Null-Koeffizienten für  $x_2$  in der dritten Zeile. Nach diesem Schritt haben wir die *obere Dreiecksform* erreicht. Wir belassen die erste und zweite Zeile. Die neue 3. Zeile wird aus der alten *minus*  $\frac{5}{16}$  mal der vorherigen 2. Zeile. Das ergibt

$$(III^*) : 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + (\frac{5}{2} - \frac{15}{16}) \cdot x_3 = -5 + \frac{55}{16}.$$

(III<sup>\*</sup>) ist äquivalent zu  $\frac{25}{16}x_3 = -\frac{25}{16}$ . Daraus folgt  $x_3 = -1$ . Setzen wir  $x_3 = -1$  in die zweite Zeile ein, so ergibt sich

$$(II) - 2 \cdot (I) : 0 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 + 3 \cdot (-1) = -11.$$

Aus  $-8 \cdot x_2 = -8$  folgt  $x_2 = 1$ . Schlussendlich setzen wir  $x_3 = -1$  und  $x_2 = 1$  in die erste Gleichung ein und erhalten

$$(I) : 2 \cdot x_1 + 3 \cdot 1 - (-1) = 8,$$

woraus  $x_1 = 2$  folgt. Damit hat das System eine *eindeutige Lösung*,  $\mathcal{L} = \{(2; 1; -1)\}$ . Mit der Erweiterung der auf dieses  $3 \times 3$  Gleichungssystem angewandten Technik können wir nun

beliebig große lineare Gleichungssysteme lösen.

**LI 26** **Matrixschreibweise eines Gleichungssystems:** Was ist eine Matrix? Lege die Dimension einer gegebenen Matrix fest. Was sind die Regeln für die Addition bzw. Multiplikation von Matrizen? Schreibe ein lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise  $A \cdot x = b$ .

Eine **Matrix** ist eine Anordnung von Zahlenwerten (bzw. Variablen) in **Tabellenform**. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -0,1 \end{pmatrix}$$

hat die *Dimension*  $2 \times 3$  (man sagt: '2 mal 3'). Bei der Indexierung und Dimensionsangabe gilt 'Zeile zuerst, Spalte später'. Die Matrix hat also 2 Zeilen und 3 Spalten. Wir indexieren einzelne Einträge (auch: Elemente) analog, d.h. der Eintrag  $a_{1,3}$  ist  $-1$ , d.h. der Eintrag in der 1. Zeile und 3. Spalte. Allgemein hat eine Matrix  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  die Dimension  $m \times n$ . Ist  $n = 1$ , so sprechen wir von einem **Vektor**.

- Für die **Matrizenaddition**  $A + B$  gilt: (a) nur Matrizen gleicher Dimension  $m \times n$  können addiert werden und (b) das Ergebnis (die Summe) ist wieder eine  $m \times n$  Matrix  $C$ , die Addition erfolgt dabei **elementweise**, Im Fall von zwei  $2 \times 3$  Matrizen ergibt sich

$$C = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

- Für die **Matrizenmultiplikation**  $A \cdot B$  gilt: (a) nur wenn  $A$  so viele Spalten hat wie  $B$  Zeilen, ist die Multiplikation definiert, d.h. wenn  $A$  eine  $m \times n$  Matrix ist, muss  $B$  eine  $n \times k$  Matrix sein,  $k, m, n \in \mathbb{N}$ .<sup>14</sup> Das Ergebnis ist eine  $m \times k$  Matrix  $C$ , dabei gilt für das Element  $c_{i,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \dots + a_{i,n} \cdot b_{n,j}$ .<sup>15</sup> Im Fall  $3 \times 2$  mal  $2 \times 2$  gilt beispielsweise

$$C = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \\ a_{3,1}b_{1,1} + a_{3,2}b_{2,1} & a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Damit kann man ein lineares Gleichungssystem mit  $n$  Gleichungen und  $n$  Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in der Matrixform  $A \cdot x = b$  anschreiben, wobei  $A$  eine  $n \times n$  Matrix ist, und  $x$  und  $b$  zwei  $n \times 1$  Matrizen (also: Vektoren) sind. Im Fall  $n = 3$  sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

<sup>14</sup>Im Gegensatz zur Multiplikation von reellen Zahlen, ist die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ, d.h.  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

<sup>15</sup>Das Element  $c_{i,j}$  ist das sogenannte **Skalarprodukt** der  $i$ -ten Zeile von  $A$  und der  $j$ -ten Spalte von  $B$ .



**25** Überprüfe durch Ausmultiplizieren der linken Seite, dass (2.24) tatsächlich einem  $3 \times 3$ -Gleichungssystem der generellen Form von (2.20) entspricht.

**Lösung:** Dem Leser überlassen.



**26** Berechne

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 3 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Unter Anwendung der vorher diskutierten Additions- bzw. Multiplikationsregeln ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0,5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**LI 27** **Inverse Matrix:** Definiere die Inverse einer Matrix. Wann existiert sie? Schreibe die Lösung des Gleichungssystems  $A \cdot x = b$  mittels der inversen Matrix  $A^{-1}$ . Wann darf man das?

Für quadratische  $n \times n$  Matrizen  $A$  kann die zu  $A$  **inverse Matrix**  $A^{-1}$  existieren, sodass

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

wobei  $I_n$  die  $n \times n$  **Einheitsmatrix** mit  $i_{k,k} = 1$  und  $i_{k,j;k \neq j} = 0$  ist, die 1-Einträge in der Hauptdiagonale hat, und sonst nur 0-Einträge aufweist. Multipliziert man die  $n \times n$  Einheitsmatrix von links auf eine  $n \times k$  Matrix  $B$  oder von rechts auf eine  $k \times n$  Matrix  $C$ , so gilt  $I_n \cdot B = B$  bzw.  $C \cdot I_n = C$ . Für ein  $n$ -dimensionales lineares Gleichungssystem  $A \cdot x = b$  existiert  $A^{-1}$  genau dann, wenn das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat, die dann

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = I_n \cdot x = x = A^{-1} \cdot b$$

ist. Die Berechnung von  $A^{-1}$ , falls sie existiert, ist grundsätzlich aufwendig und numerisch oft nicht sehr stabil. Bei der Verwendung von Computersystemen ist die Inversenbildung oft als Funktion inkludiert, sodass die Matrixschreibweise eine schnelle Lösung von linearen Gleichungssystemen erlaubt. So finden Matrizen auch z.B. in der Portfoliooptimierung ein reichhaltiges Einsatzgebiet.

## 2.4 Grundideen der Wahrscheinlichkeitstheorie

**LI 28** **Experiment, Elementarereignis und Grundraum:** Erkläre, was ein Experiment in der Wahrscheinlichkeitstheorie ist. Was ist in diesem Zusammenhang ein Elementarereignis bzw. der Grundraum  $\Omega$ ?

Ein **Experiment** produziert eines von vielen möglichen Ergebnissen. Vor dem Experiment ist es nicht bekannt, welches Ergebnis eintreffen wird. Nach dem Experiment kann das Ergebnis beobachtet werden. Ein mögliches *Experiment* ist der Wurf einer Münze. Das *Ergebnis* heißt auch **Elementarereignis**. Nach dem Münzwurf kann das Ergebnis entweder Kopf (K) oder Zahl (Z) sein. Der **Grundraum**, den

wir  $\Omega$  nennen, ist dann die Menge aller möglichen Ergebnisse:<sup>16</sup>

$$\Omega = \{K; Z\}.$$



**27** Wir werfen zwei (als 1. bzw. 2. markierte) Münzen gleichzeitig und beobachten das Ergebnis der beiden Münzen. Beschreibe den Grundraum.

**Lösung:** Da es sich um 2 Münzen handelt, werden die einzelnen Münz-Ergebnisse als *Dupel* zusammengefasst. Beispielsweise bedeutet  $(K, Z)$ , dass die erste Münze Kopf und die zweite Münze Zahl zeigt. Der Grundraum aller möglichen Ergebnisse ist dann

$$\Omega = \{(K, K); (K, Z); (Z, K); (Z, Z)\}.$$



**28** Wir werfen einen Würfel mit sechs Seiten. Das Ergebnis des Wurfes ist die Augenzahl, die der Würfel zeigt. Bestimme den Grundraum.

**Lösung:** Der Würfel zeigt nach dem Wurf 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Augen. Wir notieren einfach die entsprechende ganze Zahl. Damit ist der Grundraum des Experiments

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$



**29** Ein Unternehmen installiert eine neue Maschine. Wollen wir nun die Lebensdauer der Maschine beschreiben, d.h. wann (in Jahren ab heute) die Maschine ausgemustert wird (z.B. wegen nicht reparabler Schäden, Überalterung etc.; wann genau wissen wir heute noch nicht). Die Maschine kann auch unterjährig ausgemustert werden. Bestimme den Grundraum für den zufälligen Ausmusterungszeitpunkt.

**Lösung:** Die Lebensdauer der Maschine ist eine reelle Zahl größer als 0. Somit definieren wir den Grundraum als<sup>a</sup>

$$\Omega = (0; \infty).$$

<sup>a</sup>Erinnerung: wir verwenden in diesem Skriptum eckige Klammern für geschlossene Intervalle (die Randzahl ist inkludiert) und runde Klammern für offene Intervalle (die Randzahl ist exkludiert).

**LI 29** **Ereignisse:** Erkläre, was Ereignisse in der Wahrscheinlichkeitstheorie sind.

*Ereignisse* sind nun eine Menge (bzw. die Zusammenfassung), bestehend aus einem oder mehreren Elementarereignissen aus dem Grundraum. Zur Benennung von Ereignissen verwenden wir meist Großbuchstaben, d.h. Ereignis  $A$ , Ereignis  $B$ , Ereignis  $C$  etc. **In der Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigen wir uns damit, Wahrscheinlichkeiten von solchen Ereignissen zu berechnen.** Beispiele solcher Ereignisse könnten sein: die Wahrscheinlichkeit, dass (a) der Aktienpreis von XY AG zum Ende das Jahres unter €90 liegt, (b) Frau XY in diesem Jahr mindestens einen Versicherungsanspruch meldet, oder (c) eine Versicherung dieses Jahr mehr als €2.000.000 an Ansprüchen auszahlen muss.



<sup>16</sup>Erinnerung: einzelne Elemente in einer Menge fassen wir in der Folge zwischen geschwungenen Klammern,  $\{$  und  $\}$ , zusammen

**30** Für den doppelten Münzwurf: definiere die Ereignisse  $A$  'beide Münzen zeigen dasselbe',  $B$  'die erste Münze zeigt Zahl' und  $C$  'beide Münzen zeigen etwas Unterschiedliches'.

**Lösung:** Wir wählen alle entsprechenden Elemente aus dem Grundraum aus und fassen sie jeweils als Ereignis-Menge zusammen. Wir erhalten  $A = \{(K, K); (Z, Z)\}$ ,  $B = \{(Z, K); (Z, Z)\}$  und  $C = \{(K, Z); (Z, K)\}$ .



**31** Wurf eines Würfels: definiere die Ereignisse  $D$  'die Augenzahl ist gerade',  $E$  'die Augenzahl ist höchstens 3' und  $F$  'die Augenzahl ist ungerade' als Mengen.

**Lösung:** Wir definieren  $D = \{2; 4; 6\}$ ,  $E = \{1; 2; 3\}$  und  $F = \{1; 3; 5\}$ .

**LI 30** **Verknüpfung von Ereignissen:** Erkläre, wie man Ereignisse mit 'und', 'oder' und 'aber nicht' verknüpfen kann. Was ist das Ergebnis einer Verknüpfung?

Alle Elemente in einem *Ereignis* sind auch im *Grundraum*  $\Omega$  enthalten. Ein Ereignis  $A$  ist somit eine Untermenge des Grundraums  $\Omega$ , man schreibt auch  $A \subseteq \Omega$ . Zum Beispiel (Doppelter Münzwurf) sind beide Elemente des Ereignisses  $A = \{(K, K); (Z, Z)\}$ , auch im Grundraum  $\Omega = \{(K, K); (K, Z); (Z, K); (Z, Z)\}$  enthalten. Einzelne Ereignisse können wiederum **zu einem neuen Ereignis  $C$  verknüpft** werden. Zum Beispiel als Ereignis 'A oder B' (wir schreiben: ' $A \cup B$ '; das neue Ereignis besteht aus allen Elementen, die zumindest in einem der beiden Ereignisse  $A$  und  $B$  vorkommen), 'A und B gleichzeitig' (wir schreiben: ' $A \cap B$ '; das neue Ereignis besteht aus allen Elementen die sowohl in  $A$  als auch in  $B$  vorkommen), oder als 'A, aber nicht B' (wir schreiben: ' $A \setminus B$ '; das neue Ereignis besteht aus allen Elementen die in  $A$  vorkommen, aber nicht in  $B$ ).



**32** Wurf eines Würfels: werte die Ereignisse  $D \cap F$  'Augenzahl ist gerade und ungerade',  $D \cup F$  'Augenzahl ist gerade oder ungerade' und  $D \setminus E$  'gerade, aber nicht höchstens 3' aus.

**Lösung:** Wir stellen fest, dass sich die Ereignisse  $D$  und  $F$  gegenseitig ausschließen, d.h. das Ergebnis eines Wurfs kann nicht gleichzeitig gerade und ungerade sein. Damit haben  $D$  und  $F$  kein gemeinsames Element, d.h.  $D \cap F = \{\}$ . Das Ereignis  $D \cap F$  ist somit ein unmögliches Ereignis. Jedes Ergebnis des Wurfexperimentes ist gerade oder ungerade, oder  $D \cup F = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega$ . Man sagt, dass das Ereignis  $D \cup F$  ein **sicheres Ereignis**, da es in jedem Fall eintritt. Das Ereignis 'gerade, aber größer als 3' ist durch  $D \setminus E = \{4; 6\}$  gegeben.

**LI 31** **Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse:** Welche Eigenschaften haben 'Wahrscheinlichkeiten'?

Innerhalb eines Modells weisen wir nun einzelnen Ereignissen  $E_i$  entsprechende Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}[E_i]$  zu.<sup>17</sup> Dabei verlangen wir einige Eigenschaften:

- **Beschränktheit:** die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $E$  liegt zwischen 0 und 1, d.h.  $0 \leq \mathbb{P}[E] \leq 1$ .

<sup>17</sup> $\mathbb{P}[E]$  ist eine Schreibweise für 'die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis  $E$  eintritt'.

- **Additivität:** für Ereignisse  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , die sich gegenseitig ausschließen gilt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines von ihnen eintritt, gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse ist. Wir schreiben

$$\mathbb{P}[E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n] = \mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[E_2] + \dots + \mathbb{P}[E_n]$$

wenn für alle  $E_i \cap E_j = \{\}$ ,  $i \neq j$ , gilt. Wir sagen auch die Ereignisse  $E_i$  sind **paarweise disjunkt**.

- **Normiertheit:** die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiges Ergebnis aus dem Grundraum  $\Omega$  eintritt (Erinnerung:  $\Omega$  umfasst alle möglichen Ergebnisse des Experiments) ist 1, d.h.  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$ .
- **Gegenwahrscheinlichkeit:** die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis  $E$  nicht eintritt, nennen wir **Gegenwahrscheinlichkeit von E**, und wir berechnen  $\mathbb{P}[\text{nicht } E] = \mathbb{P}[\Omega \setminus E] = 1 - \mathbb{P}[E]$ . Damit sehen wir, dass  $\mathbb{P}[\{\}] = \mathbb{P}[\Omega \setminus \Omega] = 1 - 1 = 0$ .

**LI 32** **Laplace-Wahrscheinlichkeit:** *Definiere den Begriff der 'Laplace-Wahrscheinlichkeit'. Wann werden Laplace-Wahrscheinlichkeiten verwendet?*

Bevor wir zu einem weiteren Beispiel kommen, definieren wir noch die **Laplace-Wahrscheinlichkeit**. Wenn in einem Experiment jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich (umgangssprachlich: rein zufällig) angenommen wird (z.B. beim Wurf eines Würfels, beim Wurf einer Münze, bei der zufälligen Auswahl eines Kandidaten), so definiert man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $E$  als

$$\mathbb{P}[E] := \frac{\text{Anzahl der Elementarereignisse in } E}{\text{Anzahl der Elementarereignisse in } \Omega} = \frac{|E|}{|\Omega|}. \quad (2.25)$$



**33** Doppelter Münzwurf: berechne die Laplace-Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  aus Beispiel 30. Berechne ebenso  $\mathbb{P}[A \cup C]$ ,  $\mathbb{P}[A \cap C]$ , sowie die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Münze Kopf zeigt.

**Lösung:** Wir zählen, dass  $|\Omega| = 4$ . Wir berechnen weiters  $\mathbb{P}[A] = |A|/|\Omega| = 2/4 = 0,5$ ,  $\mathbb{P}[B] = |B|/|\Omega| = 2/4 = 0,5$  und  $\mathbb{P}[C] = |C|/|\Omega| = 2/4 = 0,5$ . Wir beobachten, dass alle drei Wahrscheinlichkeiten zwischen 0 und 1 liegen. Nachdem  $A \cup C = \Omega$  ein sicheres Ereignis ist und  $A$  und  $C$  sich gegenseitig ausschließen (d.h. *disjunkt* sind bzw.  $A \cap C = \{\}$  gilt), folgt, dass  $\mathbb{P}[A \cup C] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[C] = 1$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Münze Kopf zeigt, ist die Gegenwahrscheinlichkeit von  $B$ , und wir berechnen  $\mathbb{P}[\Omega \setminus B] = 1 - \mathbb{P}[B] = 1 - 0,5 = 0,5$ .



**34** Wurf eines Würfels: berechne die Laplace-Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $D$ ,  $E$  und  $F$  aus Beispiel 31. Berechne ebenso  $\mathbb{P}[D \cap F]$ ,  $\mathbb{P}[D \cup F]$  und  $\mathbb{P}[D \setminus E]$ .

**Lösung:** Wir sehen, dass  $|\Omega| = 6$ . Analog zu Beispiel 33 berechnen wir  $\mathbb{P}[D] = \mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[F] = 3/6 = 0,5$ . Zusätzlich erhalten wir  $\mathbb{P}[D \cap F] = \mathbb{P}[\{\}] = 0$ ,  $\mathbb{P}[D \cup F] = \mathbb{P}[\Omega] = 1$  und  $\mathbb{P}[D \setminus E] = \mathbb{P}[\{4; 6\}] = |\{4; 6\}|/|\Omega| = 2/6 = 0,3\bar{3}$ .

**LI 33** **Bedingte Wahrscheinlichkeiten:** *Was ist eine 'bedingte Wahrscheinlichkeit'? Wie kann man bedingte Wahrscheinlichkeiten verwenden, um  $\mathbb{P}[U \cap V]$  für zwei Ereignisse  $U$  und  $V$  zu berechnen?*

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Ereignisse  $U$  und  $V$  gleichzeitig eintreten, also  $\mathbb{P}[U \cap V]$ , kann man berechnen als die Wahrscheinlichkeit, dass  $U$  eintritt,  $\mathbb{P}[U]$ , mal der **bedingten Wahrscheinlichkeit**  $\mathbb{P}[V|U]$ , dass  $V$  eintritt unter der Bedingung, dass  $U$  eingetreten ist. Die (auch intuitive) Identität

$$\mathbb{P}[U \cap V] = \mathbb{P}[U] \cdot \mathbb{P}[V|U] = \mathbb{P}[V] \cdot \mathbb{P}[U|V] \quad (2.26)$$

lässt sich für  $\mathbb{P}[U] \neq 0$  und  $\mathbb{P}[V] \neq 0$  als Formel für die *bedingten Wahrscheinlichkeiten*,

$$\mathbb{P}[U|V] = \frac{\mathbb{P}[U \cap V]}{\mathbb{P}[V]} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P}[V|U] = \frac{\mathbb{P}[U \cap V]}{\mathbb{P}[U]}, \quad (2.27)$$

umschreiben.



**35** Wurf eines Würfels: wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis des Wurfs zwischen 1 und 3 liegt, wenn uns jemand verrät, dass das Ergebnis gerade ist?

**Lösung:** Die Ereignisse seien definiert wie in Beispiel 31. Wir berechnen

$$\mathbb{P}[E|D] = \frac{\mathbb{P}[E \cap D]}{\mathbb{P}[D]} = \frac{|\{2\}|/|\Omega|}{|\{1; 2; 3\}|/|\Omega|} = \frac{1/6}{3/6} = 1/3.$$

**LI 34** **Bedingung auf disjunkte Ereignisse:** Erkläre, wie man eine Wahrscheinlichkeit durch Bedingung auf eine Menge von anderen Ereignissen, die paarweise disjunkt sind und den Grundraum aufspannen, berechnen kann.

Für sich gegenseitig ausschließende Ereignisse  $E_1, E_2, \dots, E_n$  (d.h.  $E_i$  sind paarweise disjunkt), die zusammen den Grundraum ergeben (d.h.  $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \Omega$ ) kann man die Wahrscheinlichkeit eines anderen Ereignisses  $F$  als

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F] &= \mathbb{P}[F \cap E_1] + \mathbb{P}[F \cap E_2] + \dots + \mathbb{P}[F \cap E_n] \\ &= \mathbb{P}[F|E_1] \cdot \mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[F|E_2] \cdot \mathbb{P}[E_2] + \dots + \mathbb{P}[F|E_n] \cdot \mathbb{P}[E_n], \end{aligned} \quad (2.28)$$

also (a) als die Summe von gemeinsamen Ereignissen, oder (b) als (wahrscheinlichkeitsgewichtete) Summe von bedingten Wahrscheinlichkeiten schreiben.



**36** Wurf eines Würfels: die Ereignisse  $D$  'gerade' bzw.  $F$  'ungerade' schließen sich gegenseitig aus, zudem gilt  $D \cup F = \Omega$ . Berechne die Wahrscheinlichkeit, eine der Zahlen 1, 2 oder 3 ('klein', Ereignis  $E$ ) zu würfeln, durch Bedingung auf  $D$  bzw.  $F$ .

**Lösung:** Von den 3 Elementarereignissen (2, 4 und 6) in  $D$  ist nur eines (2) 'klein'. Damit gilt:  $\mathbb{P}[E|D] = 1/3$ . Analog errechnet man, dass  $\mathbb{P}[E|F] = 2/3$ . Wir berechnen

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E|D] \cdot \mathbb{P}[D] + \mathbb{P}[E|F] \cdot \mathbb{P}[F] = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Damit haben wir die Wahrscheinlichkeit 'klein' erklärt durch 'klein und gerade' oder 'klein und ungerade'.

**LI 35** **Satz von Bayes:** Erkläre den Satz von Bayes.

Aus der Identität (2.26) können wir durch einfache Umformung nun den bekannten *Satz von Bayes* herleiten. Für zwei Ereignisse  $U$  und  $V$  lautet dieser (unter der Bedingung  $\mathbb{P}[V] \neq 0$ )

$$\mathbb{P}[U|V] = \frac{\mathbb{P}[U \cap V]}{\mathbb{P}[V]} = \frac{\mathbb{P}[V|U] \cdot \mathbb{P}[U]}{\mathbb{P}[V]}. \quad (2.29)$$

Bei Bedarf kann man  $\mathbb{P}[V]$  wegen (2.28) weiter als  $\mathbb{P}[V|U] \cdot \mathbb{P}[U] + \mathbb{P}[V|\Omega \setminus U] \cdot \mathbb{P}[\Omega \setminus U]$  zerlegen. Eines der vielen interessanten Anwendungsbeispiele des Satzes von Bayes wird nun diskutiert.



**37** Eine Person hat einen medizinischen Test gemacht und ärgerlicherweise ein positives (d.h. Antikörper im Blut nachgewiesen) Testergebnis erhalten. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person dennoch nicht erkrankt ist? Die Krankheit ist relativ selten, nur 0,5% der Bevölkerung sind an ihr erkrankt. Wird ein Kranker getestet, ergibt der Test in 98% der Fälle ein positives (und: korrektes) Ergebnis; wird ein Gesunder getestet, ergibt der Test in 2% der Fälle ein positives (und: falsches) Ergebnis. Der Test hat also eine Fehlerrate von nur 2%.

**Lösung:** Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\text{krank}|\text{Test pos.}] &= \frac{\mathbb{P}[\text{Test pos.}|\text{krank}] \cdot \mathbb{P}[\text{krank}]}{\mathbb{P}[\text{Test pos.}|\text{krank}] \cdot \mathbb{P}[\text{krank}] + \mathbb{P}[\text{Test pos.}|\text{gesund}] \cdot \mathbb{P}[\text{gesund}]} \\ &= \frac{0,98 \cdot 0,005}{0,98 \cdot 0,005 + 0,02 \cdot 0,995} = 19,8\%. \end{aligned}$$

Damit besteht auch nach dem positiven Testergebnis immer noch eine über 80% Wahrscheinlichkeit, gesund zu sein. Das Problem liegt im geringen Auftreten der Krankheit in der Bevölkerung im Vergleich zum Auftreten eines Testfehlers.

**LI 36** **Stochastische Unabhängigkeit:** Erkläre, wann zwei Ereignisse  $U$  und  $V$  (stochastisch) unabhängig bzw. abhängig sind.

Zwei Ereignisse  $U$  und  $V$  sind **stochastisch unabhängig**, wenn

$$\mathbb{P}[U \cap V] = \mathbb{P}[U] \cdot \mathbb{P}[V] \quad (2.30)$$

gilt. Setzt man (2.26) hier ein, folgt, dass die Unabhängigkeit auch gilt wenn  $\mathbb{P}[U|V] = \mathbb{P}[U]$  bzw.  $\mathbb{P}[V|U] = \mathbb{P}[V]$ . Sind zwei Ereignisse nicht unabhängig, so sind sie **(stochastisch) abhängig**.



**38** Doppelter Münzwurf: entscheide, ob die Ereignisse  $A$  und  $B$  (Definition in Beispiel 30) unabhängig sind. Gilt Unabhängigkeit für  $A$  und  $C$ ?

**Lösung:** Wir berechnen  $A \cap B = \{(Z, Z)\}$  und  $A \cap C = \{\}$ . Damit sind  $A$  und  $B$  unabhängig, da  $\mathbb{P}[A \cap B] = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2 = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$ . Die Ereignisse  $A$  und  $C$  sind dagegen abhängig, da  $\mathbb{P}[A \cap C] = 0 \neq \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[C]$ .



**39** Wurf eines Würfels: verifiziere analog zum obigen Beispiel, dass  $D$  und  $E$  abhängig,  $D$  und  $F$  abhängig und auch  $E$  und  $F$  abhängig sind. Die Ereignisse sind in Beispiel 31 definiert.

**Lösung:** dem Leser überlassen.



**LI 37** Zufallsvariablen: Erkläre den Begriff 'Zufallsvariable'.

Manchmal sind wir mehr an einer Funktion des Ergebnisses eines Experiments interessiert, als am Ergebnis selbst. Beispielsweise ist der einem Unfall folgende Versicherungsanspruch (Funktion des Unfallschadens) für den Versicherer von mehr Bedeutung als der Unfallschaden selbst. Im Zuge eines Spiels, bei dem man zwei Würfel wirft und die Augensumme als €-Betrag ausbezahlt kommt, ist man mehr an der Auszahlung (Funktion der beiden Augenzahlen) interessiert, als an den einzelnen Würfeln. Die 'Augensumme der beiden Würfel' ist dann eine **Zufallsvariable**  $X$  (Anm. für Zufallsvariablen verwendet man typischerweise Großbuchstaben). Allgemein ordnet eine Zufallsvariable  $X$  jedem Elementarereignis  $\omega$  (z.B.  $(3, 4)$ ) aus dem Grundraum  $\Omega$  eine spezielle reelle Zahl  $x$  (z.B.  $3 + 4 = 7$ ) zu, damit ist  $X$  eine **Funktion von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}$** , also  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .



**40** Doppelter Münzwurf: ein Freund bietet ein Spiel an, bei dem man zwei Münzen wirft, und wenn beide Münzen 'Kopf' zeigen, bekommt man €1. Berechne die Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}[\text{Auszahlung} = 0]$  und  $\mathbb{P}[\text{Auszahlung} = 1]$ .

**Lösung:** Ob man Geld bekommt, hängt nun vom Ergebnis des Münz-Experiments ab. Man kann nun den Gewinn als Zufallsvariable  $X$  definieren.  $X$  nimmt entweder den Wert 1 an (bei  $(K, K)$ ) oder 0 (bei  $(K, Z)$ ,  $(Z, K)$  oder  $(Z, Z)$ ). Wir wissen von vorher, dass  $\mathbb{P}[(K, K)] = 1/4$  ('Laplace-Wahrscheinlichkeit'). Deshalb folgern wir, dass auch  $\mathbb{P}[X = 1] = 1/4$ , und da alle anderen Ergebnisse des Münz-Experiments eine Auszahlung von  $X = 0$  ergeben, folgt weiters,  $\mathbb{P}[X = 0] = 1 - 1/4 = 3/4$ .



**41** Doppelter Würfelwurf: wir werfen nun zwei Würfel, und vereinbaren die Summe der beiden Würfelaugen auszuzahlen. Welche Auszahlungen sind möglich? Berechne die Wahrscheinlichkeit jedes möglichen Auszahlungsbetrags.

**Lösung:** Der Grundraum dieses Experiment kann als  $\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); (4,4); (4,5); (4,6); (5,5); (5,6); (6,6)\}$  geschrieben werden.<sup>a</sup> In unserer Definition von  $\Omega$  gilt, dass  $\mathbb{P}[(i, j)] = 2/36$ ,  $(i, j)$  aus  $\Omega$ , wenn  $i$  und  $j$  zwei unterschiedliche Zahlen sind, und sonst  $\mathbb{P}[(i, i)] = 1/36$ . Die Zufallsvariable  $Y$  beschreibe nun die Summe der Würfelaugen. Wir definieren die **Wahrscheinlichkeitsfunktion**  $p(y) = \mathbb{P}[Y = y]$ . Damit erhalten wir  $p(1) = \mathbb{P}[Y = 1] = 0$  (nicht möglich),  $p(2) = \mathbb{P}[Y = 2] = \mathbb{P}[(1, 1)] = 1/36$ ,  $p(3) = \mathbb{P}[(1, 2)] = 2/36$ ,  $p(4) = \mathbb{P}[\{(1, 3); (2, 2)\}] = 2/36 + 1/36 = 3/36$  etc. Verifiziere, dass  $p(5) = 4/36$ ,  $p(6) = 5/36$ ,  $p(7) = 6/36$ ,  $p(8) = 5/36$ ,  $p(9) = 4/36$ ,  $p(10) = 3/36$ ,  $p(11) = 2/36$  und  $p(12) = 1/36$ . Summieren wir all diese Wahrscheinlichkeiten auf, so ergibt sich  $\mathbb{P}[2 \leq Y \leq 12] = 1$ , da dies alle möglichen Werte für  $Y$  abdeckt (und implizit alle Elemente von  $\Omega$ ).

<sup>a</sup>Es sei angemerkt, dass in dieser Definition von Omega nur alle verschiedenen Kombinationen von 2 Würfelzahlen aufgelistet sind. Wir merken uns hier nicht, welcher Würfel welche Augenzahl zeigt (alternativ hätten wir das tun können und indem wir sowohl  $(1, 2)$  als auch  $(2, 1)$  etc. in  $\Omega$  aufnehmen). Da nicht mehr alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, können wir nicht mehr direkt Laplace-Wahrscheinlichkeiten ausrechnen.

**LI 38** **Diskrete bzw. stetige Zufallsvariablen:** Erkläre anhand von Beispielen den Unterschied zwischen diskreten und stetigen Zufallsvariablen.

Wir bemerken, dass die Menge der möglichen Werte der Zufallsvariable  $Y$  im obigen Beispiel nur *abzählbar viele*<sup>18</sup> Elemente enthält (nämlich 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 oder 12).  $Y$  ist deshalb eine **diskrete Zufallsvariable**. Im Gegensatz dazu stehen **stetige Zufallsvariablen** die (im Wesentlichen) beliebige Werte auf *stetigen Intervallen* annehmen können. Zum Beispiel können wir eine Zufallszahl  $X$  definieren, die beliebige reelle Zahlen  $x$  zwischen 0 und 1 annehmen kann. Im Gegensatz zu diskreten Zufallsvariablen können wir nicht mehr abzählen, wie viele Zahlenwerte  $X$  annehmen kann (man sagt: stetige Intervalle enthalten *überabzählbar* viele Zahlen);  $X$  ist somit eine *stetige* Zufallsvariable.

**LI 39** **Verteilungsfunktion:** Definiere die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen  $X$ . Welche 3 charakteristischen Eigenschaften hat eine Verteilungsfunktion?

Um zu beschreiben, wie wahrscheinlich welche Werte einer Zufallsvariablen  $X$  sind, definieren wir die **Verteilungsfunktion**<sup>19</sup>

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] \text{ für alle } x \in (-\infty; \infty). \quad (2.31)$$

Die Funktion  $F_X$  erfüllt die folgenden drei Eigenschaften:

- $F_X$  ist eine **monoton steigende Funktion**. Wenn  $y > x$ , so können wir  $\mathbb{P}[X \leq y] = \mathbb{P}[X \leq x] + \mathbb{P}[x < X \leq y]$  schreiben, und der zweite Summand ist stets  $\geq 0$ , sodass  $F_X(y) \geq F_X(x)$  gilt.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = F_X(\infty) = 1$ . Im Unendlichen haben wir alle möglichen Werte von  $X$  erfasst und damit alle möglichen Werte  $X = x$  abgedeckt.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0$ .

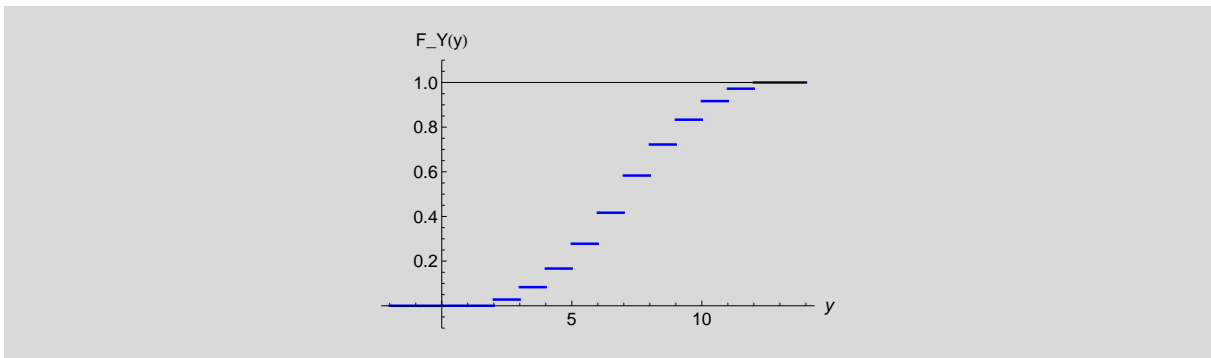


**42** Doppelter Würfelwurf: benutze die Wahrscheinlichkeitsfunktionen von Beispiel 41 um die Verteilungsfunktion  $F_Y(y)$  an den Stellen  $y \in \{-2; 1; 4; 4,2; 15\}$  auszuwerten.

**Lösung:** Wir berechnen  $F_Y(-2) = \mathbb{P}[Y \leq -2] = 0$ ,  $F_Y(1) = \mathbb{P}[Y \leq 1] = 0$ ,  $F_Y(4) = \mathbb{P}[Y \leq 4] = \mathbb{P}[Y = 2] + \mathbb{P}[Y = 3] + \mathbb{P}[Y = 4] = 6/36 = 1/6$ ,  $F_Y(4,2) = \mathbb{P}[Y \leq 4,2] = F_Y(4) = 1/6$  und - nachdem ab  $y = 12$  alle möglichen Werte von  $Y$  abgedeckt sind -  $F_Y(15) = \mathbb{P}[Y \leq 15] = F_Y(12) = 1$ . Damit haben wir bereits ein erstes Beispiel zu Verteilungsfunktionen diskreter Zufallsvariablen behandelt. Nachfolgend ist die Verteilungsfunktion  $F_Y(y)$  abgebildet, sie hat die Form einer **Stufenfunktion**.

<sup>18</sup>Eine Menge ist *abzählbar*, wenn es eine eins-zu-eins Beziehung zu einer Folge bestehend aus natürlichen Zahlen (1,2,3,4,...) gibt. Speziell ist jede endliche Menge abzählbar (im obigen Beispiel wir können zählen: 1. Element ist 2, 2. Element ist 3, ..., 11. Element ist 12. - damit ist die Menge abzählbar). Ebenso sind die ganzen Zahlen und die rationalen Zahlen abzählbar.

<sup>19</sup>Anmerkung: In der üblichen Notation ist  $X$  eine Zufallsvariable, und  $x$  ist ein reeller Wert.



**LI 40** **Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion:** Beschreibe den Zusammenhang zwischen den Wahrscheinlichkeitsfunktionen  $p(x)$  einer diskreten Zufallsvariablen  $X$  und ihrer Verteilungsfunktion  $F_X(x)$ .

In der Folge betrachten wir ausgewählte Beispiele diskreter Zufallsvariablen. Wir erinnern uns an die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p(x) = \mathbb{P}[X = x]$ . Ist  $x$  kein möglicher Werte von  $X$ , so gilt  $p(x) = 0$ . Wenn  $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  die Menge aller möglichen Werte von  $X$  ist, so können wir einfach die Wahrscheinlichkeiten aller Werte  $x_i$  aufsummieren, die  $X$  annehmen kann und die kleiner gleich  $a$  sind, um zur Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \sum_{x_i \leq a} p(x_i)$$

zu kommen. Graphisch ist die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable eine *Stufenfunktion* (vgl. Beispiel 41). Es gilt natürlich, dass  $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$ , wenn über alle möglichen Werte von  $X$  aufsummiert wird.

**LI 41** **Erwartungswert:** Definiere den Erwartungswert am Beispiel einer diskreten Zufallsvariablen  $X$ .

Um **Verteilungseigenschaften** verschiedener Zufallsvariablen zu vergleichen, berechnet man oft **Eigenschaftsmaße** von Zufallsvariablen. Ein Beispiel für solch ein Maß ist der wahrscheinlichkeitsgewichtete Durchschnitt der möglichen Werte der Zufallsvariablen, auch **Erwartungswert**  $\mathbb{E}[X]$  (oder: Mittelwert, 1. Moment) der Zufallsvariablen genannt. Wir berechnen den *Erwartungswert* im Fall einer *diskreten Zufallsvariablen*  $X$ , die die Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  annehmen kann, als

$$\mathbb{E}[X] = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \dots + x_n \cdot p(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i). \quad (2.32)$$

$\mathbb{E}[X]$  ist somit ein Durchschnitt über die möglichen Werte  $X = x$ .  $\mathbb{E}[X]$  muss aber *nicht* selbst ein möglicher Wert von  $X$  sein.

**LI 42** **Höhere Momente und Varianz:** Definiere die (zentralen) Momente und die Varianz einer Zufallsvariablen  $X$ .

Analog können wir auch den Erwartungswert über Funktionen  $g(X)$  von  $X$  berechnen, also  $\mathbb{E}[g(X)]$ . Für diskretes  $X$  mit möglichen Ausfallswerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  erfolgt die Berechnung diesmal über das Aufsummieren der gewichteten  $g(x_i)$  (analog zu (2.32)), d.h.

$$\mathbb{E}[g(X)] = g(x_1) \cdot p(x_1) + g(x_2) \cdot p(x_2) + \dots + g(x_n) \cdot p(x_n) = \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot p(x_i). \quad (2.33)$$

Zum Beispiel kann man als Funktion die *quadratische Abweichung vom Erwartungswert*, also  $g(X) = (X - \mathbb{E}[X])^2$ . Der Erwartungswert  $\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$  ist dann ein **Streuungsmaß** und

heißt **Varianz**,  $\text{Var}[X]$ .<sup>20</sup> Die **Standardabweichung**  $\sigma_X$  ist die Wurzel aus der *Varianz*, d.h.  $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}$ , und ebenfalls ein *Streuungsmaß*.

Die *Varianz* ist der 2. **zentrale Moment** von  $X$ . Analog nennen wir den 3. zentralen Moment,  $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3]$ , (nach Normierung) die **Schiefe**, und dieser ist ein Maß für die Abweichung von einer *symmetrischen* Verteilung. Der 4. zentrale Moment von  $X$ ,  $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^4]$ , wird (nach Normierung) meist als **Kurtosis** bzw. **Wölbung** bezeichnet.



**43** Für eine Zufallsvariable  $X$  gilt, dass  $\mathbb{P}[X = -1] = \mathbb{P}[X = 1] = 0,5$ . Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von  $X$ .

**Lösung:** Wir erhalten  $\mathbb{E}[X] = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot (-1) = 0$ . Die Varianz ist dann  $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = 0,5 \cdot (1 - 0)^2 + 0,5 \cdot (0 - (-1))^2 = 1$ . Damit gilt für die Standardabweichung  $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]} = \sqrt{1} = 1$ . Hätten wir statt der Varianz versucht, die Streuung weg vom Mittelwert mit  $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] = 0,5 \cdot (-1 - 0) + 0,5 \cdot (1 - 0)$  zu beschreiben (also ohne das Quadrat), so hätte sich 0 ergeben.



**44** Doppelter Münzwurf: wie in Beispiel 40 wird €1 bei  $(K, K)$  ausbezahlt und andernfalls nichts. Die Zufallsvariable  $X$  beschreibt die Auszahlung. Berechne  $\mathbb{E}[X]$  und  $\sigma_X$

**Lösung:** Für den Erwartungswert ergibt sich folglich  $\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \mathbb{P}[X = 1] + 0 \cdot \mathbb{P}[X = 0] = 1 \cdot 1/4 = 1/4$ . Weiters ergibt sich für die Varianz  $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - 1/4)^2] = (1 - 1/4)^2 \cdot \mathbb{P}[X = 1] + (0 - 1/4)^2 \cdot \mathbb{P}[X = 0] = (3/4)^2 \cdot 1/4 + (-1/4)^2 \cdot 3/4 = 9/64 + 3/64 = 12/64$ . Die Standardabweichung ist dann  $\sigma[X] = 1/\sqrt{6}$ .

**LI 43 Erwartungswert- und Varianzregeln:** Gegeben seien zwei Konstante  $a, b$  und zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ . Erkläre die Rechenregeln für  $\mathbb{E}[a \cdot X]$ ,  $\mathbb{E}[X + Y]$ ,  $\text{Var}[a \cdot X]$  und  $\text{Var}[X + Y]$ .

Es gilt

- $\mathbb{E}[a \cdot X] = a \cdot \mathbb{E}[X]$ ,
- $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ ,
- $\text{Var}[a \cdot X] = a^2 \cdot \text{Var}[X]$ ,
- $\text{Var}[X + a] = \text{Var}[X]$ .
- Eine wichtige Formel ist die der Varianz zweier Zufallsvariablen,

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2 \cdot \text{Cov}[X, Y].$$

Dabei ist  $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])]$  die **Kovarianz** von  $X$  und  $Y$ . Man schreibt die Kovarianz auch oft als  $\text{Cov}[X, Y] = \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot \rho_{X,Y}$ , wobei man  $\rho_{X,Y}$  **Korrelationskoeffizienten** von  $X$  und  $Y$  nennt. Es gilt immer  $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$ . Ebenso gilt:  $\text{Cov}[a \cdot X, b \cdot Y] = a \cdot b \cdot \text{Cov}[X, Y]$ .

<sup>20</sup>Man benötigt das Quadrat, damit sich positive und negative Abweichungen im Durchschnitt nicht zu 0 ausgleichen.



**45** Gegeben seien zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit  $\mathbb{E}[X] = 2$ ,  $\mathbb{E}[Y] = 3$ ,  $\sigma_X = 1$ ,  $\sigma_Y = 2$ ,  $\rho_{X,Y} = -0,5$ . Berechne Erwartungswert und Varianz von  $2 \cdot X - Y$ .

**Lösung:** Da der Erwartungswert additiv ist und Konstante vorgezogen werden können, gilt einfach  $\mathbb{E}[2X - Y] = 2 \cdot \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ . Für die Varianz gilt  $\text{Var}[2X - Y] = \text{Var}[2X] + \text{Var}[-Y] + 2 \cdot \text{Cov}[2X, -Y] = 2^2 \cdot \text{Var}[X] + (-1)^2 \cdot \text{Var}[Y] + 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \text{Cov}[X, Y] = 4 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-0,5) = 4 + 4 + 4 = 12$ .

### 2.4.1 Diskrete Verteilungen

In der Folge sind einige Beispiele oft verwendeter diskreter Verteilungen angeführt. Wir interessieren uns dabei jeweils für (a) die Wahrscheinlichkeitsfunktionen  $p(x)$  (für die möglichen Werte, die  $X$  annehmen kann) und (b) den Erwartungswert und die Varianz/Standardabweichung.

**LI 44** **Bernoulli-Verteilung:** Erkläre die Eigenschaften einer Bernoulli-verteiltern Zufallsvariable  $X$ . Wie viele Parameter besitzt die Bernoulli-Verteilung? Definiere die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p(x)$ , sowie  $\mathbb{E}[X]$  und  $\text{Var}[X]$ .

Die einfachste diskrete Verteilung ist die **Bernoulli-Verteilung**. Ist die Zufallsvariable  $X$  Bernoulli-verteilt mit Parameter  $p$ , schreiben wir kurz  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ .  $X$  nimmt unter dieser Verteilung den Wert 1 mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $q$  an und 0 mit der (Gegen-)Wahrscheinlichkeit  $(1 - q)$ , also  $p(1) = q$  und  $p(0) = 1 - q$ . Wir errechnen dann allgemein

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot q + 0 \cdot (1 - q) = q \quad (2.34)$$

und

$$\text{Var}[X] = (1 - q)^2 \cdot q + (0 - q)^2 \cdot (1 - q) = q \cdot (1 - q) \cdot (1 - q + q) = q \cdot (1 - q). \quad (2.35)$$



**46** Ein Versicherungsschaden von €1 tritt mit Wahrscheinlichkeit 0,05 ein. Berechne die Erwartung und Standardabweichung des Schadens.

**Lösung:** Man kann den Versicherungsschaden als Zufallsvariable  $X \sim \text{Bernoulli}(0,05)$  modellieren. Für den erwarteten Schaden erhalten wir  $\mathbb{E}[X] = 0,05$  und für die Standardabweichung  $\sigma[X] = \sqrt{0,05 \cdot 0,95} = 0,218$ . Eine Möglichkeit, wie Versicherungen Prämien berechnen, ist über das *Erwartungswertprinzip*. Für ein großes Pool von Versicherungsverträgen wird nach diesem Prinzip die Prämie eines einzelnen Vertrags oft mit einem Aufschlag  $\theta$  auf den *erwarteten Schaden* berechnet. Der Aufschlag deckt dann unerwartete Schäden und operative Kosten des Versicherers ab. Für einen Aufschlag von  $\theta = 40\%$  würde die Prämie z.B. mit  $(1 + \theta) \cdot \mathbb{E}[Z] = 1,4 \cdot 0,05 = 0,07$ , also mit 7 Cents pro Schadensseuro, festgesetzt.

**LI 45** **Binomialverteilung:** Erkläre den Zusammenhang zwischen der Binomial- und der Bernoulli-Verteilung. Wie viele Parameter besitzt die Binomial-Verteilung? Definiere die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p(x)$ , sowie  $\mathbb{E}[X]$  und  $\text{Var}[X]$ .

Wir betrachten nun  $n$  verschiedene und *voneinander unabhängige* Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , die jeweils Bernoulli( $q$ ) verteilt sind (jedes einzelne  $Z_i$  kann also die Werte 0 oder 1 annehmen). Die Summe  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  ist dann eine neue Zufallsvariable, die ganzzahlige Werte zwischen 0 und  $n$  annehmen kann.  $X$  ist **binomialverteilt** mit *zwei Parametern*,  $n$  und  $q$  und wir schreiben kurz

$X \sim \text{Binomial}(n; q)$ . Wir möchten nun die Wahrscheinlichkeiten  $p(k) = \mathbb{P}[X = k]$ ,  $k \leq n$ , berechnen um die Verteilung von  $X$  zu beschreiben. Man kann herleiten, dass

$$p(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad (2.36)$$

wobei  $\binom{n}{k} = n!/((n-k)! \cdot k!)$  ein **Binomialkoeffizient** ist, und es gilt  $k! = 1 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$  und  $0! = 1$  per Konvention.<sup>21</sup> Formel (2.36) kann wie folgt interpretiert werden: wir wählen  $k$  von den  $n$  Zufallsvariablen  $Z_i$  aus ( $\binom{n}{k}$  Möglichkeiten), die den Wert 1 annehmen (mit Wahrscheinlichkeit  $q \cdot q \cdot \dots \cdot q = q^k$ ), die verbleibenden  $(n-k)$  Zufallsvariablen müssen gleichzeitig den Wert 0 annehmen (mit Wahrscheinlichkeit  $(1-q) \cdot \dots \cdot (1-q) = (1-q)^{n-k}$ ).<sup>22</sup> Für den Erwartungswert ergibt sich

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot q. \quad (2.38)$$

Dies ist direkt auch aus der Additivität des Erwartungswerts und dem Wissen  $\mathbb{E}[X_i] = q$  zu sehen (vgl. LI 43).<sup>23</sup> Mit geschicktem Umformen der Definition kann auch die Varianz,

$$\text{Var}[X] = n \cdot q \cdot (1-q), \quad (2.39)$$

hergeleitet werden. Abschließend sind noch zwei Beispiele für Wahrscheinlichkeitsfunktionen binomialverteilter Zufallsvariablen in Abbildung 2.11 illustriert.



**47** Vierfacher Münzwurf: wir werfen 4 Münzen und die Zufallsvariable  $X$  sei die Anzahl der Köpfe. Berechne  $p(3)$ ,  $F_X(2)$ ,  $\mathbb{E}[X]$  und  $\text{Var}[X]$ .

**Lösung:** Für jede einzelne Münze gilt, dass  $\mathbb{P}[K] = 1/2$ . Wir definieren für jede der vier Münzen die Zufallsvariable  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , mit  $X_i = 1$ , wenn die  $i$ -te Münze Kopf zeigt und sonst  $X_i = 0$ . Die  $X_i$  sind somit Bernoulli(1/2)-verteilt, und da die einzelnen  $X_i$  unabhängig

<sup>21</sup>Der Ausdruck  $\binom{n}{k}$  gibt die Anzahl der Möglichkeiten an,  $k$  Elemente aus  $n$  unterschiedlichen Elementen auszuwählen. Beim bekannten Spiel *Lotto 6 aus 45* gibt es z.B.  $\binom{45}{6} = 8.145.060$  Möglichkeiten, 6 Zahlen aus den 45 auszuwählen. Die Wahrscheinlichkeit mit einem Tipp die richtige Kombination zu tippen liegt somit bei (Laplace-Wahrscheinlichkeit)  $1/8.145.060 = 0,000000123$ .

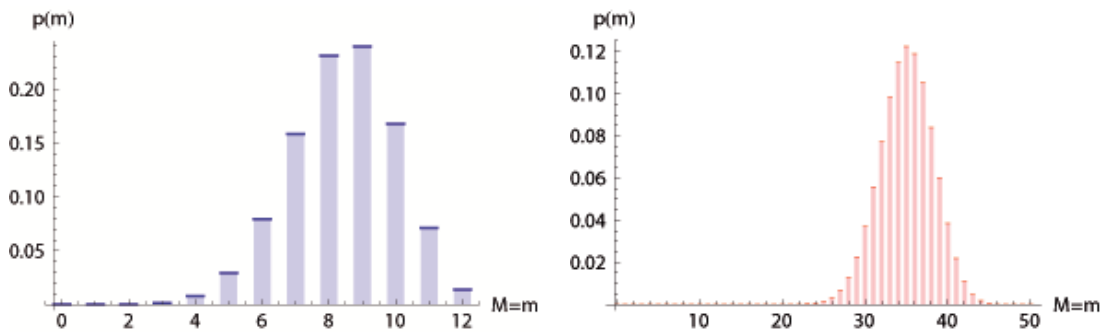
<sup>22</sup>Wir wissen, dass die Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten  $p(0) + p(1) + \dots + p(n) = 1$  ergeben muss. Dies kann mit dem **Binomialtheorem**,

$$\binom{n}{0} q^0 (1-q)^n + \binom{n}{1} q^1 (1-q)^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} q^n (1-q)^0 = (q + (1-q))^n = 1^n = 1, \quad (2.37)$$

gezeigt werden.

<sup>23</sup>Für Interessierte: den Erwartungswert der Binomialverteilung kann man auch durch geschicktes Umformen der Definition des Erwartungswertes herleiten:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + \dots + n \cdot p(n) \\ &= 1 \cdot \frac{n!}{1!(n-1)!} q^1 (1-q)^{n-1} + \dots + n \frac{n!}{n! \cdot 0!} q^n (1-q)^0 \\ &= 1 \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{1!(n-1)!} q \cdot q^0 (1-q)^{n-1} + \dots + n \frac{n \cdot (n-1)!}{n \cdot (n-1)! \cdot 0!} q \cdot q^{(n-1)} (1-q)^0 \\ &= q \cdot n \cdot \left( 1 \cdot \frac{(n-1)!}{1!(n-1)!} q^0 (1-q)^{n-1} + \dots + \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot 0!} \cdot q^{(n-1)} (1-q)^0 \right) \\ &= q \cdot n \cdot (q + (1-q))^{(n-1)} \\ &= q \cdot n. \end{aligned}$$



**Abbildung 2.11:** Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen  $M \sim \text{Binomial}(n; q)$  mit  $n = 12, q = 0,7$  (links, vgl. Beispiel 48) und  $n = 50, q = 0,7$  (rechts) für  $m = 0, 1, \dots, n$ .

voneinander sind, ist die Summe  $X = X_1 + \dots + X_4$  Binomial(4; 1/2)-verteilt. Wir können nun Formel (2.37) verwenden und die Wahrscheinlichkeit, genau drei Mal Kopf zu bekommen, als

$$\mathbb{P}[X = 3] = p(3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

zu berechnen. Ähnlich kann man die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  auswerten. Für  $x = 2$  kann man zum Beispiel

$$\begin{aligned} F_X(2) &= \mathbb{P}[X = 0] + \mathbb{P}[X = 1] + \mathbb{P}[X = 2] \\ &= \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2^4} + 4 \cdot \frac{1}{2^4} + 6 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

berechnen. Weiters können wir den Erwartungswert  $\mathbb{E}[X] = n \cdot q = 4 \cdot 1/2 = 2$  und die Varianz  $\text{Var}[X] = n \cdot q \cdot (1 - q) = 4 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1$  mit den entsprechenden Formeln berechnen.



**48** Binomiales Aktienpreismodell: eine Aktie notiert heute bei €100. In einem vereinfachten Modell verändert sich der Wert über ein Handelsmonat um entweder +2% ('gutes Monat') oder um -2% ('schlechtes Monat'). Ein Monat ist mit Wahrscheinlichkeit 0,7 ein gutes Monat und mit Wahrscheinlichkeit 0,3 ein schlechtes Monat. Die Wertveränderung eines Monats hängt nicht von jener eines anderen Monats ab (man sagt: die Wertveränderungen der einzelnen Monate sind *paarweise unabhängig*). Was ist die Wahrscheinlichkeit in diesem Modell, am Ende eines Handelsjahres einen Aktienpreis von mindestens €90 zu beobachten?

**Lösung:** Die Zufallsvariable  $M$  sei die Anzahl der Aufwärtsmonate,  $M$  kann eine Zahl zwischen 0 und 12 annehmen.  $M$  ist dann Binomial(12; 0,7)-verteilt (vgl. Abbildung 2.11). Der Handelspreis der Aktie nach 12 Monaten ist dann wieder eine Zufallsvariable  $S = 100 \cdot (1 + 0,02)^M \cdot (1 - 0,02)^{12-M}$ . Man kann berechnen, dass für  $M = 3$  der Handelspreis  $S = 88,48\text{€}$  beträgt, und für  $M = 4$  beträgt der Wert  $S = 92,09\text{€}$  ist. Daraus lässt sich schließen, dass der Wert ab 4 Aufwärtsmonaten mindestens €90 beträgt. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S < 90] &= \mathbb{P}[M < 4] = \mathbb{P}[M = 0] + \mathbb{P}[M = 1] + \mathbb{P}[M = 2] + \mathbb{P}[M = 3] \\ &= \binom{12}{0} 0,7^0 \cdot 0,3^{12} + \binom{12}{1} 0,7^1 \cdot 0,3^{11} + \binom{12}{2} 0,7^2 \cdot 0,3^{10} + \binom{12}{3} 0,7^3 \cdot 0,3^9 \\ &= 0,0017 \end{aligned}$$

Man nützt nun die **Gegenwahrscheinlichkeit** und erhält  $\mathbb{P}[S \geq 90] = 1 - \mathbb{P}[S < 90] = 1 - 0,0017 = 0,998$ . In dem gewählten Aktienpreis-Modell beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Aktienpreis noch mindestens €90 beträgt, 99,8%.

**LI 46** **Poisson-Verteilung:** Erkläre den Zusammenhang zwischen der Binomial- und der Poisson-Verteilung. Wie viele Parameter besitzt die Poisson-Verteilung? Definiere die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p(x)$ , sowie  $\mathbb{E}[X]$  und  $\text{Var}[X]$ .

Für genügend großes  $n$  kann man zeigen, dass

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx e^{-n \cdot q} \cdot \frac{(n \cdot q)^k}{k!}, \quad (2.40)$$

gilt, im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  gilt sogar Gleichheit. Wir setzen  $\lambda = n \cdot q$  und definieren allgemein die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer mit (einem) Parameter  $\lambda$  **Poisson-verteilten** Zufallsvariablen  $X$  als

$$p(k) = \mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2.41)$$

und wir schreiben kurz  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ .<sup>24</sup> Für sehr großes  $n$  gilt somit, dass  $p(k)_{\text{Binomial}(n; q)} \approx p(k)_{\text{Poi}(n \cdot q)}$ . Den Erwartungswert und die Varianz von  $X$  kann man als

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \quad \text{und} \quad \text{Var}[X] = \lambda \quad (2.42)$$

berechnen.<sup>25</sup>

Eine Zufallsvariable  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$  kann beispielsweise verwendet werden, um die Anzahl der Schadensfälle in einem Versicherungsportfolio oder die Anzahl der Default-Ereignisse in einem Kredit-Portfolio zu modellieren, wobei man dann im Durchschnitt  $\lambda$  Schadensfälle bzw. Default-Ereignisse erwartet. Abschließend sind noch zwei Beispiele für Wahrscheinlichkeitsfunktionen Poisson-verteilter Zufallsvariablen in Abbildung 2.12 illustriert.



**49** Poisson-Verteilung: in einem Portfolio, bestehend aus 1.000 Versicherungsverträgen, erwartet man im Durchschnitt über eine Betrachtungsperiode 10 Schadensfälle. Wir modellieren die Anzahl der Schadensfälle als Poisson-verteilte Zufallsvariable  $X$ . Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Schadensfälle auftreten? Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass nicht mehr als 5 Schadensfälle auftreten?

**Lösung:** Wir wählen  $\lambda = 10$ , damit die erwartete Anzahl an Schadensfällen  $\mathbb{E}[X] = \lambda = 10$  beträgt. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schaden im Portfolio auftritt  $\mathbb{P}[X = 0] =$

<sup>24</sup>Eulers Formel beschreibt die Exponentialfunktion als Summe,  $e^\lambda = 1 + \lambda + \lambda^2/2! + \lambda^3/3! + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k/k!$ . Mit dieser bekannten Formel kann man schnell verifizieren, dass sich die Wahrscheinlichkeiten  $p(k)$  zu 1 aufaddieren, da

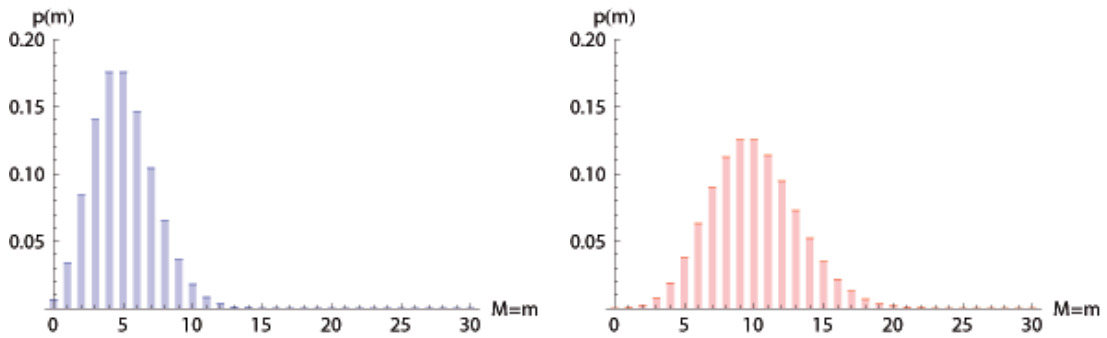
$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^\lambda = e^{-\lambda+\lambda} = 1.$$

<sup>25</sup>Für Interessierte: man kann wieder Eulers Formel verwenden um den Erwartungswert von  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$  als

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!} = \lambda \end{aligned}$$

zu berechnen.





**Abbildung 2.12:** Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen  $M \sim \text{Poi}(\lambda)$  mit  $\lambda = 5$  (links) und  $\lambda = 10$  (rechts, vgl. Beispiel 49) für  $m = 0, 1, \dots, 30$ .

$e^{-10}10^0/0! = e^{-10} = 0,00005$ , und somit sehr klein. Weiters berechnen wir

$$F_X(5) = \mathbb{P}[X \leq 5] = e^{-10} \cdot \left( \frac{10^0}{0!} + \frac{10^1}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \frac{10^4}{4!} + \frac{10^5}{5!} \right) = 6,7\%.$$

Mit der Annahme einer Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda$  ist die Varianz automatisch  $\text{Var}[X] = \lambda$ . Der Verteilung ist einfach zu handhaben, da sie nur einen Parameter hat. Falls wir aber empirisch beobachten, dass  $\text{Var}[X]$  wesentlich verschieden vom Erwartungswert  $\mathbb{E}[X]$  ist, dann ist die Poisson-Verteilung u.U. keine gute Modell-Wahl.

### 2.4.2 Stetige Verteilungen, das Gesetz der großen Zahlen

Im Fall der diskreten Zufallsvariablen konnte  $X_{\text{diskret}}$  nur abzählbar viele (bzw. speziell: endlich viele) Werte annehmen. Manchmal kann es aber für die Modellierung passender und/oder mathematisch-technisch von Vorteil sein, anzunehmen, dass eine Zufallsvariable  $X$  beliebige Werte auf reellen Intervallen annehmen kann.  $X$  heißt dann **stetige Zufallsvariable**. Zum Beispiel könnten wir den genauen Verlust aus einem Versicherungsportfolio mit  $X \in [0; \infty)$  oder die Rendite einer Aktie mit  $X \in \mathbb{R}$  modellieren.<sup>26</sup> Im Vergleich zum diskreten Fall sehen wir, dass das Konzept der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p(x)$  im stetigen Fall ersetzt werden muss, da es jetzt überabzählbar viele mögliche (z.B. beliebige reelle) Werte für  $X$  gibt. Ebenso müssen wir die Definition des Erwartungswertes anpassen.

**LI 47** **Stetige Zufallsvariable:** Definiere den Begriff ‘stetige Zufallsvariable’. Was ist die Dichtefunktion in diesem Zusammenhang? Wie hängen die Verteilungsfunktion und Dichtefunktion zusammen?

Wir definieren:  $X$  folgt einer **stetigen Verteilung** (auch:  $X$  ist eine **stetige Zufallsvariable**), wenn eine integrierbare, nicht-negative (d.h. die Funktion kann nur die 0 oder positive Werte annehmen) Funktion  $f(x)$  existiert (‘Eigenschaft 1’), sodass für alle Werte  $a \in \mathbb{R}$  gilt, dass

$$F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a] = \int_{-\infty}^a f(x) dx. \tag{2.43}$$

Wir rufen den diskreten Fall ins Gedächtnis (dort galt:  $F_X(a) = \sum_{x_i \leq a} p(x_i)$ ), und erkennen, dass

<sup>26</sup>Obwohl es praktisch nur *diskrete* Verluste, Gewinne und Preise gibt (da die kleinste Messeinheit 1 Cent ist), ist es oft praktischer, Geldgrößen trotzdem als *stetige* Zufallsvariablen zu modellieren. Dies hilft, innerhalb des Modells noch Ergebnisse bzw. Aussagen erzielen zu können, da man im diskreten Fall sehr, sehr viele Einzel-Möglichkeiten beschreiben und berücksichtigen müsste.

im stetigen Fall die Summe  $\Sigma$  wieder durch das Integral  $\int$  ersetzt wird, statt  $p(x)$  im diskreten Fall steht nun  $f(x) dx$ . Differenziert man die rechte und linke Seite nach  $a$ , so erhält man die Beziehung

$$\frac{d}{da} F_X(a) = F'_X(a) = f(a). \quad (2.44)$$

Die Funktion  $f(x)$  nennt man **Dichtefunktion** der Zufallsvariablen  $X$ . Die folgenden Eigenschaften gelten dann für stetige Zufallsvariablen:

- Für Werte  $a < b \in \mathbb{R}$  erhalten wir

$$\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \mathbb{P}[X \leq b] - \mathbb{P}[X \leq a] = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  einen bestimmten Wert  $a$  annimmt ist 0. Man sieht, dass

$$\mathbb{P}[X = a] = \mathbb{P}[a \leq X \leq a] = \int_a^a f(x) dx = 0.$$

- Integriert (diskret: summiert) man über alle möglichen Werte von  $X = x$ , muss man wiederum 1 erhalten ('Eigenschaft 2'; zusätzlich zu *Eigenschaft 1* in Formel (2.43)):

$$\mathbb{P}[-\infty < X < \infty] = \mathbb{P}[-\infty \leq X \leq \infty] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

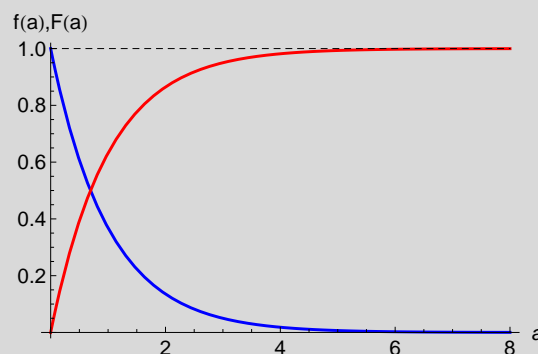


**50** Dichtefunktion: zeige, dass die Funktion  $f(x) = e^{-x}$  für  $x \geq 0$  und  $f(x) = 0$  für  $x < 0$  eine Dichtefunktion ist und berechne die dazugehörige Verteilungsfunktion.

**Lösung:** Zur Überprüfung der Aussage verifizieren wir die Eigenschaften (1) und (2) (siehe oben). Es gilt  $e^{-x} \geq 0$  per Definition der Exponentialfunktion, d.h.  $f(x)$  ist eine nicht-negative Funktion. Weiters gilt, dass  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = -0 - (-1) = 1$ . Da (1) und (2) erfüllt sind, ist  $f(x)$  eine Dichtefunktion. Für die Verteilungsfunktion berechnet man

$$F_X(a) = \int_0^a -e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=a} = -e^{-a} - (-1) = 1 - e^{-a}.$$

Die Funktion  $f(x)$  ist die Dichte der sog. Exponential(1)-Verteilung. Die Dichte- (blau,  $f(a)$ ) und Verteilungsfunktion (rot,  $F_X(a)$ ) sind nachfolgend abgebildet.



**LI 48** Erwartungswert und Varianz stetiger Zufallsvariablen: Definiere den Erwartungswert und die Varianz einer stetigen Zufallsvariablen  $X$  mit Dichtefunktion  $f(x)$ .

Ähnlich wie für diskrete Zufallsvariablen, gewichtet man jeden möglichen Wert  $X = x$  mit der 'unmittelbaren Wahrscheinlichkeit'  $f(x) dx$ , und integriert ( $\sim$  summiert) dann über alle möglichen  $x$ -Werte auf, um den Erwartungswert (wenn er existiert)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (2.45)$$

zu berechnen. Unter geeigneten Annahmen gilt dasselbe allgemein auch für Funktionen  $g(x)$ , d.h.

$$\mathbb{E}[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx \quad (2.46)$$

und speziell  $\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 \cdot f(x) dx$ . In der Folge werden nun einige gängige stetige Verteilungen diskutiert.



**51** Für Interessierte: verwende die Dichtefunktion  $f(x) = \exp(-x)$  für  $x \geq 0$  der Zufallsvariablen  $X$  um zu beweisen, dass  $\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx = 1$  (partielle Integration) und unter Verwendung des Ergebnisses  $\mathbb{E}[X] = 1$  auch  $\text{Var}[X] = \int_0^{\infty} (x - 1)^2 \cdot e^{-x} dx = 1$  (zweimal partielle Integration) gilt.

Lösung: dem Leser überlassen.

**LI 49** **Gleichverteilung:** Definiere die Dichte- und Verteilungsfunktion einer gleichverteilten Zufallsvariablen  $X$ . Gib auch  $\mathbb{E}[X]$  und  $\text{Var}[X]$  an.

Eine Zufallsvariable  $X$  sei **gleichverteilt** auf dem Intervall  $[a, b]$ ,  $a < b$ . Wir schreiben kurz  $X \sim U[a, b]$  ('U' für engl. *uniform*). Sind zwei Teilintervalle von  $[a, b]$  gleich lang, so ist es gleich wahrscheinlich, dass  $X$  einen Wert aus dem ersten bzw. zweiten Intervall annimmt. Gilt z.B.  $X \sim U[0, 1]$ , so ist  $\mathbb{P}[0,2 \leq X \leq 0,3] = \mathbb{P}[0,65 \leq X \leq 0,75]$ . Es kommt dabei nur auf die Länge der Intervalle an, und nicht auf die Lage. Damit muss  $f(x)$  auf dem Intervall  $[a, b]$  konstant sein, und  $f(x) \equiv 0$  auf  $\mathbb{R} \setminus [a, b]$  (d.h. außerhalb des Intervalls). Speziell gilt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a, b], \\ 0 & \text{für } x \in (-\infty, a) \cup (b, \infty) \end{cases} \quad (2.47)$$

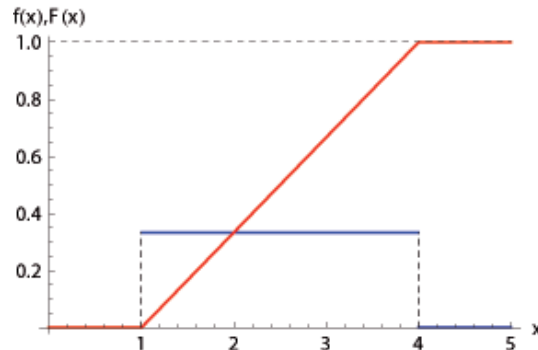
und man kann leicht verifizieren, dass  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_a^b 1/(b-a) dx = x/(b-a)|_{x=a}^{x=b} = (b-a)/(b-a) = 1$ . Für  $x \in [a, b]$  ergibt sich

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dz = \frac{x-a}{b-a}, \quad (2.48)$$

und  $F_X(x) = 0$  für  $x < a$  und  $F_X(x) = 1$  für  $x > b$ . Der Erwartungswert ist intuitiv in der Mitte

zwischen  $a$  und  $b$  zu finden, und so ergibt sich<sup>27</sup>

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (2.49)$$



**Abbildung 2.13:** Dichte- (blau,  $f(x)$ ) und Verteilungsfunktion (rot,  $F_X(x)$ ) für  $X \sim U[1; 4]$  (vgl. Beispiel 52).



**52** Gleichverteilung: eine Zufallsvariable  $X$  sei gleichverteilt auf  $[1, 4]$ . Berechne (1)  $\mathbb{P}[X > 2]$ , (2)  $\mathbb{P}[2 < X < 3]$  und (3)  $\mathbb{E}[X]$  sowie  $\text{Var}[X]$ .

**Lösung:** Man kann direkt ablesen, dass  $a = 1$  und  $b = 4$ . Wir berechnen (1)  $\mathbb{P}[X > 2] = 1 - \mathbb{P}[x \leq 2] = 1 - (2 - 1)/(4 - 1) = 2/3$ , (2)  $\mathbb{P}[2 < X < 3] = \mathbb{P}[X \leq 3] - \mathbb{P}[X \leq 2] = (3 - 1)/(4 - 1) - (2 - 1)/(4 - 1) = 1/3$  und (3)  $\mathbb{E}[X] = (1 + 4)/2 = 2,5$  sowie  $\text{Var}[X] = (4 - 1)^2/12 = 9/12 = 3/4$ . Das Beispiel ist in Abbildung 2.13 illustriert.

**LI 50** **Exponentialverteilung:** Definiere die Dichte- und Verteilungsfunktion einer exponential( $\lambda$ )-verteilten Zufallsvariablen  $X$ . Gib auch  $\mathbb{E}[X]$  und  $\text{Var}[X]$  an.

In Beispiel 50 haben wir bereits eine exponential(1)-verteilte Zufallsvariable kennengelernt. Allgemein kann die **Exponentialverteilung** mit Parameter  $\lambda$  zur Modellierung von (1) positiven und (2) unbeschränkten (d.h. kein oberes Limit) Zufallsgrößen  $X$  verwendet werden (z.B. zur Modellierung eines Verlustes, einer Wartezeit oder eines positiven Preises). Wir schreiben kurz  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Die Dichtefunktion wird als

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \quad (2.50)$$

gewählt, und die Verteilungsfunktion berechnet sich für  $x > 0$  als

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda y} dy = -e^{-\lambda y} \Big|_{y=0}^{y=x} = 1 - e^{-\lambda x}. \quad (2.51)$$

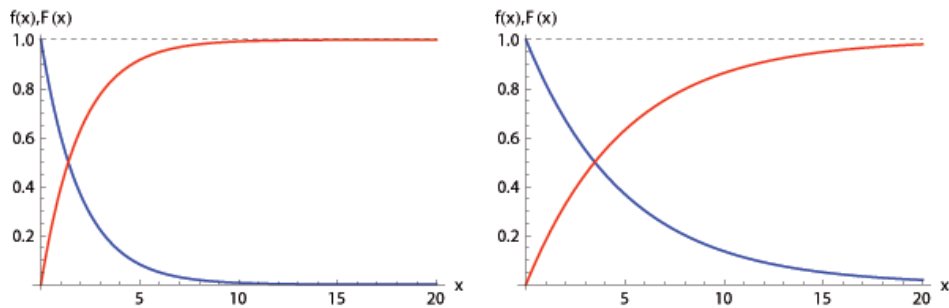
Mittels partieller Integration leitet man  $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$  und  $\text{Var}[X] = 1/\lambda^2$  her.

<sup>27</sup>Im Speziellen berechnet man

$$\mathbb{E}[X] = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{b^2 - a^2}{a(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

und

$$\text{Var}[X] = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$



**Abbildung 2.14:** Dichte- (blau,  $f(x)$ ) und Verteilungsfunktion (rot,  $F_X(x)$ ) für  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ :  $\lambda = 0,5$  (links, vgl. Beispiel 53) und  $\lambda = 0,2$  (rechts).



**53** Exponentialverteilung: man modelliert die Wartezeit, bis ein neuer Versicherungsschaden innerhalb eines Portfolios eintritt, als exponentialverteiltes  $X$ . Im Durchschnitt wartet man 2 Zeiteinheiten. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens 4 Zeiteinheiten wartet?

**Lösung:** Da  $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda = 2$ , folgt dass  $\lambda = 1/2$ . Weiters berechnet man, dass  $\mathbb{P}[X > 4] = 1 - F_X(4) = 1 - (1 - e^{-1/2 \cdot 4}) = 13,5\%$ . Das Beispiel ist in Abbildung 2.14 illustriert.

**LI 51** **Lack-of-Memory Eigenschaft:** Erkläre die Lack-of-Memory Eigenschaft der Exponentialverteilung. Wie hängt die Exponential- mit der Poissonverteilung zusammen?

Die Exponentialverteilung hat die sog. **Lack-of-Memory** Eigenschaft. Wissen wir beispielsweise, dass ein exponential-verteiltes  $X > 3$  ist ('Bedingung'), so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass  $X > 3 + 2$  gegeben  $X > 3$ , gleich groß wie die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass  $X > 2$ ; ist also  $\mathbb{P}[X > 5 | X > 3] = \mathbb{P}[X > 2]$ . Allgemein gilt: hat die Zufallsvariable  $X$  die Lack-of-Memory Eigenschaft, so gilt für  $y > x$ , dass

$$\mathbb{P}[X > y | X > x] = \mathbb{P}[X > y - x]. \tag{2.52}$$

Wir können dies auf eine exponentialverteilte Wartezeit  $X$  (z.B. bis zum nächsten Schadensfall in einem Versicherungsportfolio) 'übersetzen'. Wenn bis zum Zeitpunkt 3 noch kein Ereignis eingetroffen ist, so ist es gleich wahrscheinlich, (a) noch mindestens 2 weitere Zeiteinheiten (ZE) bis zum nächsten Ereignis warten zu müssen (also bis zum Zeitpunkt 5), wie (b) von Beginn an 2 ZE bis zum ersten Ereignis warten zu müssen (d.h. wir blicken nur nach vorne und vergessen, dass wir schon 3 ZE gewartet haben). Es besteht eine besondere Beziehung zur Poisson-Verteilung: sind die Wartezeiten zwischen Ereignissen  $\text{Exp}(\lambda)$  verteilt, so ist die Anzahl der im Zeitraum  $(0, t]$  aufgetretenen Ereignisse  $\text{Poi}(\lambda \cdot t)$ -verteilt.



**54** Exponentielle Wartezeiten und Poisson-Verteilung: in einem Portfolio von Versicherungsverträgen tritt im Durchschnitt alle 10 Geschäftstage ein Schadensfall auf. Die Zeiten zwischen zwei Schäden werden als exponential-verteilte Zufallsvariablen modelliert. Ein Jahr hat 250 Geschäftstage. Wieviele Schadensfälle erwartet man innerhalb eines Geschäftsjahrs? Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Geschäftsjahr höchstens 10 Schadensfälle auftreten?

**Lösung:** Wir messen die Zeit  $X$  bis zum Auftreten des nächsten Schadenfalls in Geschäftsjahren mit 250 Geschäftstagen. Die erwartete Wartezeit bis zum nächsten Schadensfall ist

somit  $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda = 10/250 = 1/25 = 0,04$ . Daraus folgt, dass  $\lambda = 1/\mathbb{E}[X] = 25$ . Da die Schadens-Zwischenzeiten  $\text{Exp}(\lambda)$  verteilt sind, ist die Anzahl der Schäden  $N$  in einem Jahr  $\text{Poi}(\lambda \cdot 1)$ -verteilt. Es folgt, dass die erwartete Anzahl an Schadensfällen  $\mathbb{E}[N] = \lambda = 25$  beträgt. Weiters berechnen wir

$$\mathbb{P}[N \leq 10] = e^{-25} \cdot \left( \frac{25^0}{0!} + \frac{25^1}{1!} + \dots + \frac{25^{10}}{10!} \right) = 0,0006 = 0,06\%,$$

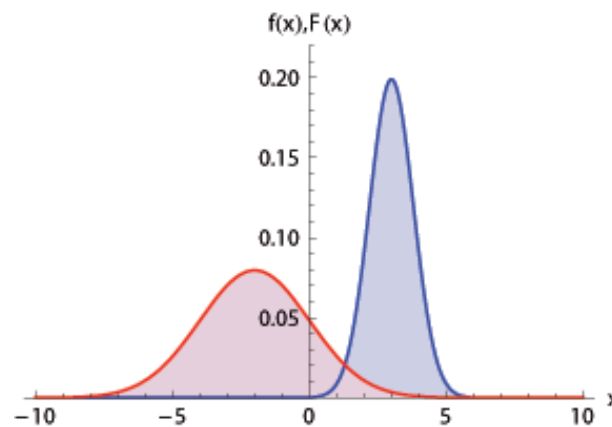
d.h. bei 25 erwarteten Fällen ist diese Wahrscheinlichkeit ist sehr gering.

**LI 52** **Normalverteilung:** Definiere die Dichtefunktion einer  $(\mu; \sigma)$ -normalverteilten Zufallsvariablen  $X$ . Gib auch  $\mathbb{E}[X]$  und  $\text{Var}[X]$  an.

Eine in vielen Bereichen sehr wichtige Verteilung ist die **Normalverteilung** mit Mittelwertparameter  $\mu$  und Standardabweichungsparameter  $\sigma$  (d.h. zweiparametrig). Wir schreiben kurz  $X \sim N(\mu; \sigma)$ . Die Dichtefunktion ist definiert als

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.53)$$

In Abbildung 2.15 sind die Dichtefunktion von zwei normalverteilten Zufallsvariablen abgebildet. Der Parameter  $\mu$  ist ein sog. **Lageparameter**. Die Dichtefunktionen sind jeweils *symmetrisch* im Mittelwert  $\mu$  (hier:  $\mu = -2$  vs.  $\mu = 3$ ). Man kann auch erkennen, dass bei geringer Streuung ( $\sigma = 0,8$ ) die Wahrscheinlichkeitsmasse (Fläche unter der Dichtefunktion) eher um den Mittelwert konzentriert ist, während bei größerem  $\sigma$  (hier:  $\sigma = 2$ ) mehr Streuung in die Werten weg vom Mittelwert zu sehen ist.



**Abbildung 2.15:** Dichtefunktion  $f(x)$  von  $X \sim N(\mu; \sigma)$ :  $\mu = -2, \sigma = 2$  (rot) und  $\mu = 3, \sigma = 0,8$  (blau).

**LI 53** **Die Standard-Normalverteilungstabelle:** Erkläre wie man mit Hilfe der Standard-Normalverteilungstabelle Wahrscheinlichkeiten von  $X \sim N(\mu; \sigma)$  auswertet.

Das Integral über die Dichtefunktion einer Normalverteilung kann mit Standardmethoden nicht explizit ausgewertet werden. So muss man numerisch integrieren um die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  zu erhalten. Mit einer *Standard-Normalverteilungstabelle* (siehe Appendix A.3) erfolgt die Berechnung von  $\mathbb{P}[X \leq x] = F_X(x)$  mit  $X \sim N(\mu; \sigma)$  in zwei Schritten:

- **Standardisierung:** wir starten bei einer sogenannten standard-normalverteilten Zufallsvariablen  $Z \sim N(0; 1)$ . Für die Zufallsvariable  $X = \sigma \cdot Z + \mu$  gilt dann (vgl. LI 43)  $\mathbb{E}[X] = \mu + 0 = \mu$

und  $\text{Var}[X] = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$  bzw.  $\sigma_X = \sigma$ . Man kann auch zeigen, dass durch (a) Multiplikation einer Konstanten und (b) Addition einer Konstanten, aus einer normalverteilten Zufallsvariable wieder eine normalverteilte Zufallsvariable entsteht.<sup>28</sup> Kehrt man das Ganze um, so gilt:  $Z = (X - \mu)/\sigma$ . Damit schreiben wir an, dass

$$\mathbb{P}[X \leq x] = \mathbb{P}[(X - \mu)/\sigma \leq (x - \mu)/\sigma] = F_Z((x - \mu)/\sigma)$$

und wir schreiben oft  $\Phi(z)$  statt  $F_Z(z)$  für die Verteilungsfunktion von  $Z \sim N(0; 1)$ .

- Wir benutzen nun die Tabelle in Appendix A.3 um dem Argument  $(x - \mu)/\sigma$  die entsprechende Wahrscheinlichkeit  $\Phi((x - \mu)/\sigma) = \mathbb{P}[X \leq x]$  zuzuordnen. Dabei ergibt sich das Argument als Summe des Hauptwerts (linke Spalte) und des Nachkommawerts (oberste Zeile). Die Tabelle selbst ordnet dem Argument  $z$  dann  $\Phi(z)$  zu.
- Ist das Argument  $(x - \mu)/\sigma$  negativ, so müssen wir uns eines Tricks bedienen. Es gilt aus Symmetriegründen, dass  $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ , sodass statt dem negativen Argument  $(x - \mu)/\sigma < 0$  ein positives  $-(x - \mu)/\sigma > 0$  in der Tabelle nachschlagen (negative Argumente sind in der Tabelle nicht angeführt) wird.



**55** Standardisierung der Normalverteilung: Eine Zufallsvariable  $X$  ist normalverteilt mit  $\mathbb{E}[X] = 3$  und  $\text{Var}[X] = 4$ . Berechne die Wahrscheinlichkeiten (1)  $\mathbb{P}[X \leq 7]$ , (2)  $\mathbb{P}[X > -1]$  und (3)  $\mathbb{P}[0 < X < 5]$ .

**Lösung:** Wir wissen, dass  $Z = (X - 3)/\sqrt{4}$  standard-normalverteilt ist. Damit ergibt sich (a)  $\mathbb{P}[X \leq 7] = \Phi((7 - 3)/2) = \Phi(2) = 0,9772$ , (b)  $\mathbb{P}[X > -1] = 1 - \mathbb{P}[X \leq -1] = 1 - \Phi((-1 - 3)/2) = 1 - (1 - \Phi(2)) = 0,9772$  (das ist dasselbe Ergebnis wie für (a) - warum?), und schließlich (c)  $\mathbb{P}[0 < X < 5] = \Phi((5 - 3)/2) - \Phi((0 - 3)/2) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1,5)) = 0,8413 - (1 - 0,9332) = 0,7745$ .

**LI 54 Zentraler Grenzwertsatz:** Erkläre den Zentralen Grenzwertsatz. Welche Annahmen sind notwendig? Was bedeutet er für die Anwendung der (bzw. Approximation durch die) Normalverteilung?

Es seien  $n$  Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  gegeben. Die Zufallsvariablen sind (a) untereinander (auch: paarweise) *unabhängig* und (b) haben dieselbe Verteilung.<sup>29</sup> Es gilt  $\mathbb{E}[X_i] = \mu \in \mathbb{R}$  und  $\text{Var}[X_i] = \sigma^2 > 0$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ . Wir bilden nun die Summe der Zufallsvariablen  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Wir wissen, dass  $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = n \cdot \mathbb{E}[X_i] = n \cdot \mu$  und  $\text{Var}[S_n] = \text{Var}[X_1 + \dots + X_n] =$

<sup>28</sup>Für Interessierte: zum Beispiel kann man mittels der *Substitutionstechnik für Integrale* entwickeln, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X \leq x] &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{subst.: } (y - \mu)\sigma = z \\ dy = \sigma \cdot dz, \quad -\infty \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow (x - \mu)/\sigma \end{array} \right| \\ &= \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z\sigma + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \sigma dz \\ &= \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned}$$

und man liest direkt ab, dass  $\mathbb{P}[X \leq x] = \mathbb{P}[Z \leq (x - \mu)/\sigma]$  mit  $Z \sim N(0; 1)$ , da die Dichtefunktion des letzten Integrals nach Definition die einer Standardnormalverteilung ist.

<sup>29</sup>Auf Englisch heißt diese Annahme 'i.i.d.', was für *independent and identically distributed* steht.

$n \cdot \text{Var}[X_i] = n \cdot \sigma^2$  (vgl. LI 43,  $\text{Cov}[X_i, X_j] = 0$ ,  $i \neq j$ , da die  $X_i, X_j$  untereinander unabhängig sind).

Wir **standardisieren** nun die Zufallsvariable  $S_n$  (analog zu LI 53) indem wir den Mittelwert  $n \cdot \mu$  von  $S_n$  abziehen und das Ergebnis durch die Standardabweichung  $\sqrt{n} \cdot \sigma$  dividieren. Damit haben wir eine neue Zufallsvariable

$$Z_n := \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \quad (2.54)$$

erzeugt, die durch diese Standardisierung den Erwartungswert  $\mathbb{E}[Z_n] = 0$  und die Varianz bzw. Standardabweichung  $\text{Var}[Z_n] = \sigma(Z_n) = 1$  hat. Der **Zentrale Grenzwertsatz** (engl. *Central Limit Theorem*) besagt nun, dass für genügend große  $n$  gilt, dass

$$\mathbb{P}[Z_n \leq z] \approx \Phi(z) \quad (2.55)$$

(bzw. im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  gilt Gleichheit). Dieses Resultat bedeutet auch, dass wenn wir eine große Anzahl an identisch verteilten und unabhängigen Zufallsvariablen aufsummieren, dass die Summe dann annähernd normalverteilt wird mit  $X_1 + \dots + X_n \approx N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$ . Beispielsweise für ein Portfolio bestehend aus z.B. 100.000 identischen und unabhängigen Versicherungsverträgen mit jeweiligem Versicherungsschaden  $X_i$ , könnte man (basierend auf dem Theorem) weiter untersuchen, ob eine Modellierung des Portfolioschadens  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  als normalverteilte Zufallsvariable angebracht ist.<sup>30</sup>



**56** Eine Versicherung hat ein Portfolio bestehend aus 10.000 Autoversicherungsverträgen. Der Versicherungsanspruch aus einem Vertrag ergibt sich aus einer Schadenswahrscheinlichkeit von  $q = 0,05$  und vereinfacht einer fixen Schadenshöhe von €1.000. Die Risiken aus den verschiedenen Verträgen sind voneinander unabhängig. Schätze (a) die Wahrscheinlichkeit, dass die kumulativen Versicherungsansprüche aus dem gesamten Portfolio €550.000 übersteigen. Welchen Betrag übersteigt man (b) mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit nicht?

**Lösung:** Wir berechnen die Portfolio-Schadenssumme als  $S_n = X_1 + \dots + X_{10.000}$  und erhalten  $\mathbb{E}[S_n] = 10.000 \cdot \mathbb{E}[X_1] = 10.000 \cdot 1000 \cdot 0,05 = 10.000 \cdot 50 = 500.000$ , sowie  $\text{Var}[S_n] = 10.000 \cdot [(1.000 - 50)^2 \cdot 0,05 + (0 - 50)^2 \cdot 0,95] = 4,75 \cdot 10^8$ . Damit ergibt sich dass  $\sqrt{n} \cdot \sigma_{X_1} = 21.795$ . Wir berechnen nun (a) als

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n > 550.000] &= 1 - \mathbb{P}[S_n \leq 550.000] = 1 - \mathbb{P}\left[Z \leq \frac{550.000 - 500.000}{21.795}\right] \\ &\approx 1 - \Phi(2,29) = 1 - 0,9890 = 0,011 = 1,1\%. \end{aligned}$$

Umgekehrt, wenn  $\Phi(z) = 0,95$  sein soll, so muss  $z = \Phi^{-1}(0,95)$  bzw.  $z \cong 1,64$  sein (aus der Tabelle in Appendix A.3). Wir berechnen nun, welches  $S_n = s_n$  nach der Standardisierung 1,64 ergibt, und wir erhalten  $s_n = 1,64 \cdot 21.795 + 500.000 = 535.744$ . Damit wird ein Portfolioschaden von 535.744 in 95% der modellierten Fälle nicht überschritten.

<sup>30</sup>Dabei ist jedoch besondere Vorsicht geboten. Ist  $n$  nicht genügend groß, oder sind die Einzelschäden nicht gleich verteilt oder nicht unabhängig, so trifft das Resultat des Zentralen Grenzwertsatzes nicht zu. Sind etwa extreme Verluste wahrscheinlicher, als durch die Normalverteilung suggeriert, so muss das Risiko- oder Bewertungsmodell entsprechend angepasst werden. Diesem Aspekt versucht man z.B. mit der Modellierung durch sog. Heavy-Tail Verteilungen gerecht zu werden.



## 2.5 Referenzen und weiterführende Literatur

Im Bereich der Wirtschaftsmathematik bzw. Wirtschaftsstatistik sind zahlreiche und gut lesbare Werke erhältlich, so z.B. Gamerith et al. [20]. Kreyszig [26] ist ein sehr umfassendes und beispielreiches Standardbuch im Bereich 'Grundlagen der angewandten Mathematik', das inhaltlich weit über den hier diskutierten Umfang hinausgeht. Für mathematische Grundlagen und Techniken im Versicherungs- bzw. Aktuarsbereich ist Bowers et al. [10] eines der Standardwerke. Um Konzepte der Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. stochastischen Modellierung zu vertiefen, ist Ross [40] ein ausgezeichnetes, umfassendes, mit zahlreichen Beispielen ausgestattetes und nicht zu technisches Buch (das allerdings nur auf Englisch erschienen ist). Aus der Schaum's-Serie gibt es gut lesbare Bände zu fast allen mathematischen Grundlagengebieten, wie Calculus, Statistik, Wahrscheinlichkeit und Statistik oder Engineering Mathematics. Auch Wikipedia (besonders die englische Version) bietet zum Teil übersichtliche Darstellungen der mathematischen Konzepte, Verteilungen und ihrer Eigenschaften etc.

## 2.6 Zusammenfassung des Kapitels

Zusammenfassend haben wir in diesem Kapitel die folgenden Konzepte bzw. Inhalte erarbeitet und das Verständnis bei der Lösung von Beispielen vertieft:

- ✓ Bruch- und Potenzrechnen.
- ✓ Summierung arithmetischer und geometrischer Reihen mittels Summenformel.
- ✓ Lösung linearer und quadratischer Gleichungen.
- ✓ Diskussion von *Funktionen*: verkettete Funktionen, graphische Darstellung in der  $x - y$ -Ebene, Monotonie.
- ✓ Spezielle Funktionen: Exponential-, Logarithmus-, Polynomfunktionen.
- ✓ Anwendung der Exponentialfunktion: von nominellen und effektiven Zinssätzen, hin zur unterjährigen und *stetigen* Verzinsung.
- ✓ *Differentialrechnung*: Differentialquotient  $f'(x_0)$  als Grenzwert des Differenzenquotienten, graphische Interpretation der Ableitung als Steigung der lokalen Tangente, Handhabung einfacher Ableitungsregeln, Zusammenhang lokale Monotonie und 1. Ableitung, lokale Minima/Maxima haben  $f(x) = 0$  als notwendige Bedingung.
- ✓ *Integralrechnung*: Riemann'sches Integral als geometrische Fläche in Bezug auf  $f(x)$ , Verständnis des Integrals als Grenzwert einer Summe, Anwendung einfacher Integralregeln.
- ✓ Systematische Lösung von  $2 \times 2$  und  $3 \times 3$  linearen Gleichungssystemen.
- ✓ *Idee Matrizenrechnung*: Definition Matrizenaddition, Definition Matrizenmultiplikation, Inverse Matrix, Anschreiben eines linearen Gleichungssystems in Matrixform.
- ✓ *Grundideen der Wahrscheinlichkeitstheorie*: Grundraum, Ereignisse, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes, (diskrete vs. stetige) Zufallsvariablen, Beschreibung von Verteilungseigenschaften mittels Momenten (am Beispiel diskreter Zufallsvariablen): Erwartungswert, Varianz, (Schiefe, Wölbung), Erwartungswert- und Varianzregeln.

- ✓ *Diskrete Verteilungen*: Bernoulli-, Binomial- und Poisson-Verteilung.
- ✓ *Stetige Verteilungen*: Dichtefunktion, Wahrscheinlichkeiten als Integral über die Dichtefunktion, Erwartungswert und höhere Momente, Gleichverteilung, Exponentialverteilung, Normalverteilung.
- ✓ *Zentraler Grenzwertsatz*.



# Kapitel 3

## Applied Economics

Anmerkung: dieser Abschnitt ist als einziger auf Englisch verfasst; auch die Überprüfung des Themenbereichs 'Economics' im Auswahlverfahren wird auf Englisch stattfinden.

### Inhalte und Lernziele

In the following we explain basic economic concepts by distinguishing the areas (a) microeconomics, (b) macroeconomics and (c) monetary and fiscal policy. In microeconomics we will study the behaviour of market participants that drive the demand for and supply of certain goods and services. In particular we focus on how price levels drive demand and supply in a competitive market, and, conversely, how demand and supply lead to a market price. While considerations will vary for different levels of competition on the supply side, such as open competition, oligopolies and monopolies, we will mostly focus on open competition given the concise format of these notes. Macroeconomics, on the other hand, studies the performance and dynamics of whole economies, rather than single markets. This includes topics such as performance measurement, employment, inflation, saving vs. investment decisions within an economy, economic cycles and international trade and finance. Macroeconomic models are applied by governments to assess and decide on economic policy measures. Despite being a sub-field of macroeconomics, we deal with monetary and fiscal policy issues separately as they are of great relevance to the financial sector.

The field of economics attempts to answer questions such as the following:

- What is the connection between the traded quantity and the price of a product?
- How do market participants allocate their (scarce) resources? In particular, how do individuals make buying decisions given their income/wealth? How do suppliers decide how much of a product to provide?
- What are the impacts of asymmetric information between the buyers and the sellers on finding the market price (we will deal with this in the context of insurance in Chapter 5)? For example, think of buying a car in the second-hand market where the sellers knows more about the car than the buyer.
- Should governments restrict market prices or fight monopolies?

- How would you measure the performance of an economy?
- Is it desirable to have inflation?
- If economies move in cycles (boom-high-downturn-through), how can you monitor what phase an economy is in?
- How is money created?
- Can governments or central banks manipulate economic activity? What about supporting an economy during downturns, or controlling growth during boom stages?

### 3.1 Microeconomic Concepts

**LI 55** Demand function: Explain the connection between market price and demanded quantity for ordinary goods.

In microeconomics we often aim to link the **demanded** quantity  $Q$  (dt. *Nachfrage*) for a good  $A$  to various **demand factors**. Such factors include the good's *market price*  $P$ , and often other variables such as some income (or wealth) factors  $I_1, I_2, \dots$  or the prices of other goods  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . For example, we might wish to link the number of Apple's iPhones demanded in a country, to the local market price of an iPhone, average income in this country and the prices of the competing Samsung and Nexus smartphones (or other products offered by competition). Generally we can try to express  $Q_D$  as some general function  $f$  of certain factors, i.e.

$$Q_D = f(P, I_1, I_2, \dots, P_1, P_2, \dots).$$

In particular, when we use a **linear model** (dt. *Lineares Modell*), the function  $f$  is chosen as a linear function of the various factors<sup>1</sup>, which could look like

$$Q_D = a_0 + a_1 \cdot P + a_2 \cdot I_1 + a_3 \cdot I_2 + a_4 \cdot P_1 + a_5 \cdot P_2 + \dots + \epsilon \quad (3.1)$$

for constant parameters  $a_0, a_1, a_2, \dots$  and  $\epsilon$  is some *error term*. For so-called **ordinary goods**,  $a_1$  will be negative, which means that demand decreases as the price increases, e.g. as iPhones become more expensive, there will typically be more people (a) not buying or (b) switching to alternative products, resulting in less demand for the iPhone.<sup>2</sup>

Abbildung 3.1 shows some possible shapes of demand functions for ordinary goods. On the left, we see that at high price levels, as the price drops slightly, demand increases significantly; conversely, when the price is already lower, additional small price drops lead to hardly any increase in demand. The middle figure shows a linear demand function as explained above. The graph on the right shows that at high price levels, small drops in the price do not affect demand too much; however, later after the price has dropped below some critical level, small price drops lead to a fairly large increase in demand.

<sup>1</sup>For the interested reader: or transformations of the factors, such as  $\exp(I_1)$  or  $\ln(P)$ .

<sup>2</sup>For the interested reader: note that there exist also so-called **Giffen goods**, for which demand actually increases as prices rise. Even though Giffen goods are hard to find, consider the following example. Suppose that a poor population can buy potatoes (cheap) or meat (expensive). As the price of potatoes rises, they cannot afford to spend some money on meat anymore, and finally buy more potatoes than fewer.

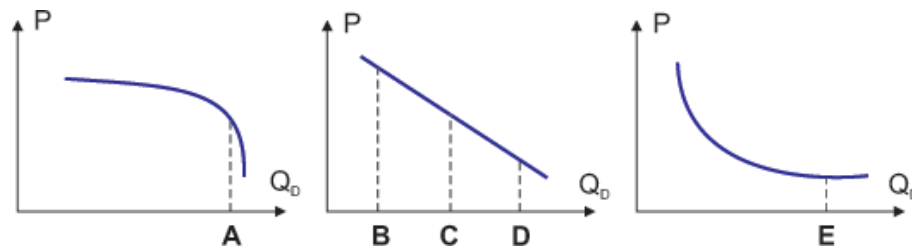


Abbildung 3.1: Various demand curves for ordinary goods.



**57** Suppose the demanded quantity  $Q_D$  of barrels of oil per day in Europe<sup>a</sup> is given by (in million barrels)

$$Q_D = 20.5 - 0.12 \cdot P + 0.05 \cdot I + 0.8 \cdot P_{PG}.$$

$I$  shall be a measure of income (more income means more consumption means more production), and  $P_{PG}$  shall be the price of petroleum gas as a possible substitute for oil. This is a strongly simplified model, however it will help to illustrate our analysis. If  $I = 17.2$  and  $P_{PG} = 4.75$  today, what is the relationship between price and demanded quantity? What is the geometric form of the demand function here? What factors might drive oil demand in reality?

**Lösung:** We plug the given variable values into the equation to get

$$Q_D = 20.5 - 0.12 \cdot P + 0.05 \cdot 17.2 + 0.8 \cdot 4.75 = 25.16 - 0.12 \cdot P.$$

This equation (or function) geometrically takes the form of a straight line in the  $P - Q$ -plane with a negative slope of  $-0.12$ . An increasing price of oil  $P$  hence drives down the demanded quantity  $Q_D$ . Other factors driving oil demand typically include economic growth, buyers' existing reserves, availability and usability of alternative energy sources and technological advances.

<sup>a</sup>In 2011, European oil consumption stood at 12.8 million per day. One Barrel (bbl) corresponds to 159 liters. Oil prices can vary greatly. Whereas the oil prices were in the €35 – 50 range in 2008/09, prices were hovering between €75 and 90 in 2012-14.

**LI 56** **Supply function:** Explain the connection between market price and supplied quantity for ordinary goods.

Similarly to the demand case, we can model the quantity  $Q_S$  of a product that producers are willing to **supply** in a certain market environment as a function  $g$  of several factors. Such factors typically include the market price  $P$  of the product, and possibly the prices  $M_i$  of materials required for the production, labour costs  $W_i$  (i.e. gross wage costs), other costs to the producer  $C_i$  (taxes, insurance, transportation), subsidies  $S_i$  (dt. Subventionen) provided by the government etc., i.e. we have

$$Q_S = g(P, M_1, M_2, \dots, W_1, W_2, \dots, C_1, C_2, \dots, S_1, S_2, \dots).$$

In the case of a linear supply function we could obtain a form such as

$$Q_S = b_0 + b_1 \cdot P + b_2 \cdot M_1 + b_3 \cdot M_2 + b_4 \cdot W_1 + b_5 \cdot S_2 + \dots + \epsilon \quad (3.2)$$

again with  $b_i \in \mathbb{R}$  being parameters and  $\epsilon$  again denotes an error term. Typically we find that  $b_1 > 0$  so that the producer is trying to sell more as the market price for her product increases. Would you expect the other parameters  $b_2, b_3, b_4$  and  $b_5$  to be positive or negative numbers?



**58** Suppose the supplied quantity  $Q_S$  of barrels of oil per day in Europe is given by (in million barrels)

$$Q_S = 2.25 + 0.15 \cdot P - 0.05 \cdot W_1 - 0.4 \cdot C_1 - 0.5 \cdot C_2.$$

$W_1$  shall be a measure of wage costs,  $C_1$  is a cost index of extracting the oil, while  $C_2$  is a cost index of the storage and shipping costs until delivery. This is again a simplified model that will help to illustrate our supply analysis. If  $W_1 = 2.3$ ,  $C_1 = 3.2$  and  $C_2 = 6.1$  today, what is the relationship between price and supplied quantity? What is the geometric form of the supply function here? What factors might drive oil demand in reality?

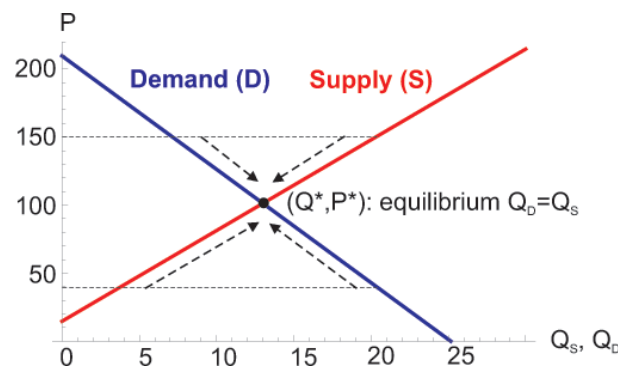
**Lösung:** We compute

$$Q_S = 2.25 + 0.15 \cdot P - 0.05 \cdot 2.3 - 0.4 \cdot 3.2 - 0.5 \cdot 6.1 = -2.195 + 0.15 \cdot P.$$

This equation (or function) geometrically takes the form of a straight line in the  $P - Q$ -plane with a now positive slope of  $+0.15$ . An increasing price of oil  $P$  hence drives up the supplied quantity  $Q_S$ , whereas increasing production, storage or shipping costs will decrease supply in our example. In practice, another important factor that drives oil supply are the proven oil reserves (or: reservoirs), for example when a new oil well is discovered. Also the costs of extracting from the various reserves will differ and with higher market prices it can become reasonable to extract from additional sources from which extraction would have been too expensive otherwise.

**LI 57** **Stable equilibrium:** Explain the term equilibrium. When is an equilibrium stable or unstable, respectively.

We now draw the demand and supply function from examples 57 and 58 as  $Q - P$ -graphs. Note that it is a standard (e.g. in textbooks on economics) to mark quantities on the  $x$ -axis, and prices on the  $y$ -axis, so we follow this approach. Suppose the price is at €150/bbl. We read from the graph, that



**Abbildung 3.2:** Demand function  $D$ , supply function  $S$  and stable equilibrium  $(Q^*, P^*)$ .

demand (at approx. 8mn bbl) would be lower than supply (at approx. 20mn bbl). What will happen? This situation is called **excess supply** (dt. *Überangebot*). Some producers cannot sell their oil and hence lower their sales price to find additional buyers. In a competitive supply market other suppliers will follow to also sell their oil. As prices drop, oil production becomes less profitable for some suppliers and they cut or stop production.<sup>3</sup> This starts a downward movement in both quantity supplied and market price, until the **equilibrium**  $(Q^*, P^*)$  is reached and the demanded quantity  $Q_D$  equals the

<sup>3</sup>Note that in practice it might be difficult to cut production during short-term price drops. Labour unions and governments might put pressure to maintain high employment, transportation contracts might cause long-term fixed costs and products might be difficult to store.

supplied quantity  $Q_S$  (i.e. where the demand curve and the supply curve intersect).

A similar argument works when we start at a price of e.g. €40/bbl. Given the **excess demand** (dt. *Übernachfrage*) at this price level, some customers will initially not be able to buy the demanded product and offer higher prices. This in turn makes production more attractive for suppliers who increase their output given the now higher prices. Again the produced quantity and price increase until  $(Q^*, P^*)$ . The equilibrium is hence the point *where demand and supply meet*. An equilibrium (dt. *Gleichgewicht*) is said to be **stable** if neither the suppliers nor the buyers have incentive to move the market price or traded quantity away from the equilibrium.<sup>4</sup>



**59** Compute the equilibrium price  $P^*$  and quantity  $Q^*$  of oil, given the market's demand curve  $Q_D = 25.15 - 0.12 \cdot P$  (in million bbl) and supply curve  $Q_S = -2.195 + 0.15 \cdot P$ . Is this a stable equilibrium?

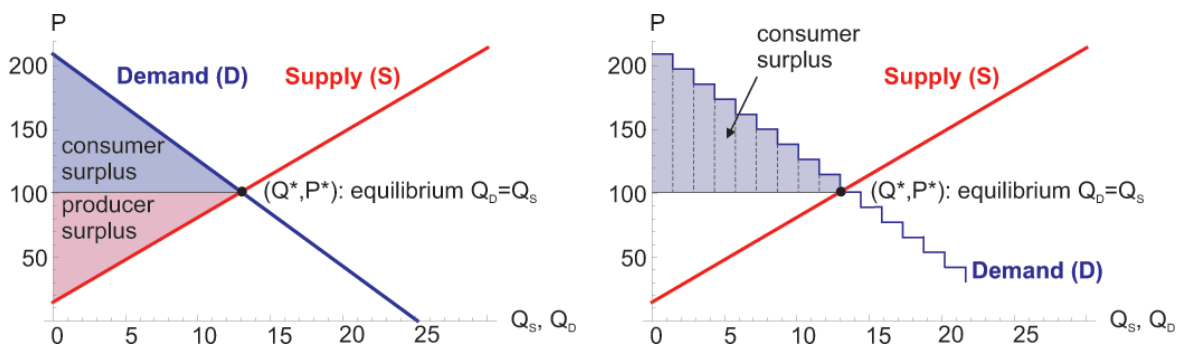
**Lösung:** This is simply the point where  $Q_S = Q_D$  so that we solve

$$25.15 - 0.12 \cdot P = -2.195 + 0.15 \cdot P$$

to find that  $P^* = 101.3$  and  $Q^* = 13$ . The equilibrium is stable, as - once in the equilibrium - neither buyers nor sellers have an incentive to change the market price or traded quantity.

**LI 58** **Consumer and producer surplus:** Explain the terms consumer and producer surplus both verbally and graphically.

Recall that in the equilibrium the quantity  $Q^*$  of the product is traded at a price  $P^*$ . Now consider an economy where only one unit of the product is traded. In this economy there exists a buyer who would buy at the price  $P_D(1) > P^*$ , on the other hand there is also a supplier who would accept a price as low as  $P_S(1) < P^*$ . By being able to trade at the equilibrium price  $P^*$ , the buyer hence saves  $P_D(1) - P^*$  and the supplier gains  $P^* - P_S(1)$ . For the second unit of the product, there is a second buyer willing to buy at a still high, but slightly lower price  $P_D(2)$ , with  $P_D(1) > P_D(2) > P^*$ , also a second supplier enters the game and accepts a price  $P_S(2)$  with  $P^* > P_S(2) > P_S(1)$ . Hence, the gains from trading at the equilibrium price for the second unit is  $P_D(2) - P^*$  for the buyer of the second unit and  $P^* - P_S(2)$  for the seller. We can repeat this until we reach the quantity  $Q^*$ .



**Abbildung 3.3:** Certain market participants benefit from a consumer and producer surplus (left), consumer surplus with discretised demand function to support the understanding (right).

<sup>4</sup>Note that there are also **unstable equilibria**  $(Q^*, P^*)$ . However, this will require excess demand for prices  $P > P^*$  and excess supply if  $P < P^*$ , which is not the case here. We will omit the discussion of such equilibria.

If we sum up all the savings 'willing to pay' *minus* 'paid' (i.e. market price  $P^*$ ), we call this the **consumer surplus** (dt. *Konsumentenrente*). Conversely, the aggregate gain 'price achieved' (i.e.  $P^*$ ) *minus* 'price willing to accept' for all producers is called **producer surplus** (dt. *Produzentenrente*). The single savings and the consumer surplus for a discretised demand function are shown in Abbildung 3.3 (right). If the demand function is continuous, we imply that not only integer quantities of the product can be traded. As illustrated in Abbildung 3.3 (left), the consumer surplus is now the area between the demand curve and the horizontal line at the equilibrium price (blue area), and the producer surplus is the area between the supply curve and the horizontal line at the equilibrium price (red area). Also note that the gains within the economy, i.e. consumer surplus *plus* producer surplus, are maximised when the market is in its equilibrium ( $Q^*, P^*$ ).



**60** Compute the consumer and the producer surplus with  $Q_D = 25.15 - 0.12 \cdot P$  and  $Q_S = -2.195 + 0.15 \cdot P$  assuming that the market has reached its equilibrium.

**Lösung:** In this case of a linear demand and supply curve, we simply compute the demand and the supply price at which the product stops to trade (i.e. for  $Q = 0$ ). We find  $P_D(0) = -25.15/0.12 = 209.6$  and  $P_S(0) = 2.195/0.15 = 14.6$ . The consumer surplus triangle hence has an area of  $\frac{1}{2}(P_D(0) - P^*) \cdot Q^* = \frac{1}{2}(209.6 - 101.3) \cdot 13 = 704$ . The producer surplus triangle has an area of  $\frac{1}{2}(P^* - P_S(0)) \cdot Q^* = \frac{1}{2}(101.3 - 14.6) \cdot 13 = 563.5$ . Note that we have calculated the area of the red and blue triangle, respectively, as depicted in Abbildung 3.3 (left).

**LI 59** **Price caps and floors:** Explain the impact of price caps and price floors on the location of the market equilibrium. Do such mechanisms bring systemic gains or losses?

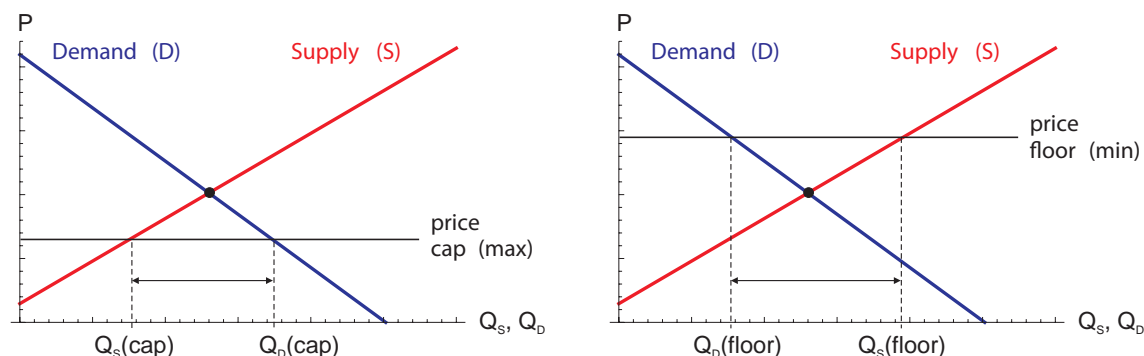
So far we have assumed that a good's price is solely determined by market forces. However, sometimes a government decides to intervene and set minimum price levels (**price floors**; e.g. minimum wages in the labour market) or maximum price levels (**price caps**; e.g. maximum charge per minute for mobile phone calls within the EU, setting an upper limit for the price of water, capping the pricing of compulsory insurance). If either a price-cap is above the equilibrium price or a price-floor below the equilibrium price, the market still stabilises in its equilibrium ( $Q^*, P^*$ ) as in an unregulated market.

Now consider the case where a price floor is set above the equilibrium price  $P^*$  (see Abbildung 3.4 (right)). By regulation the equilibrium price cannot be achieved any more. At the new minimum price, the demanded quantity  $Q_D(\text{floor})$  is below the supplied quantity  $Q_S(\text{floor})$ . Suppliers are not able to sell all their output. Consumers, on the other hand, will buy less than the normal market equilibrium quantity  $Q^*$ , and switch to other, relatively cheaper, products. Thinking of the labour market, a legally imposed minimum wage might lead companies to not hire as many employees as they would in an unregulated market. This can lead to an increase in unemployment, and companies might instead choose different strategies such as outsourcing to lower-wage countries or downsizing operations. In terms of an open-competition thinking, this causes a loss in welfare since the full consumer and producer surplus cannot be generated and is hence inefficient.

Consider the case where a price cap is set below the equilibrium price  $P^*$  (see Abbildung 3.4 (left)). By regulation the equilibrium price cannot be achieved any more. At the new maximum price, the demanded quantity  $Q_D(\text{cap})$  is above the supplied quantity  $Q_S(\text{cap})$ . Some consumers will wait to



buy the product. This waiting time can again be translated into a cost. Also producers might try to cut costs and lower the product quality, consumers might be discriminated as suppliers sell to their friends or take bribes, and a black market might develop if the product is tradeable between consumers. Again in terms of open-competition thinking, this is sub-optimal as the full consumer and producer surplus cannot be generated. Price caps are sometimes also implemented where markets are not fully competitive yet (e.g. newly privatised mobile phone market), but where the product should be available to most of the population.



**Abbildung 3.4:** The effects of price caps (left), and price floors (right) on market prices, traded quantities and the behaviour of market participants.

Note that certain taxes, subsidies or a restriction of market access (e.g. through licenses) can be other ways for a government to influence traded prices and quantities in an otherwise competitive market.

**LI 60** **Price elasticities:** Explain the price elasticity of demand (and: supply). Write down the formula for the price elasticity of demand for two points on the demand curve,  $(Q_1^D, P_1)$  and  $(Q_2^D, P_2)$ .

Suppose we compare two points on a demand curve, e.g.  $(Q_1^D, P_1) = (10, 12)$  and  $(Q_2^D, P_2) = (15, 7)$ . We then define the **price elasticity of demand** between these two points as<sup>5</sup>

$$\text{PED}(P_1, P_2) = \frac{\% \text{-change of demand quantity}}{\% \text{-change of price}} = \frac{\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}}{\frac{P_2 - P_1}{P_1}} = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta P} \quad (3.3)$$

and in our number example we find that

$$\text{PED}(12, 7) = \frac{\frac{15-10}{10}}{\frac{7-12}{12}} = \frac{50\%}{-42\%} = -1.2.$$

Hence, between the two price points  $P_1$  and  $P_2$  for every  $-1\%$  change in the price, the demanded quantity increases by  $(-1.2) \cdot (-1\%) = +1.2\%$  on average. Note that for ordinary goods, the price elasticity is negative.<sup>6</sup> Generally one would say that<sup>7</sup>

- the demand is **price elastic** if  $|\text{PED}(P_1, P_2)| > 1$ ,
- the demand is **unit elastic** if  $|\text{PED}(P_1, P_2)| = 1$  and

<sup>5</sup>Note that various definitions of the price elasticity of demand exist, as one could use  $P_1$  or  $P_2$  as the starting point.

<sup>6</sup>This is true as price increases lead to a decrease in the demanded quantity, and, conversely, price falls led to an increase in the demanded quantity.

<sup>7</sup>Note that we consider the absolute values, i.e. we ignore the negative signs. For example,  $|-1| = +1$ .

- the demand is **inelastic** if  $|\text{PED}(P_1, P_2)| < 1$ .

The more elastic the demand, the more sensitive the demand (in %) reacts to price changes (in %). To compare elasticity at different price levels, one could just move along the demand curve by always reducing the price by one,  $P_1 = 10$ ,  $P_2 = 9$ ,  $P_3 = 8$  etc.<sup>8</sup>

Taking two points on the supply curve,  $(Q_1^S, P_1)$  and  $(Q_2^S, P_2)$ , instead of the demand curve, yields the **price elasticity of supply**.



**61** Considering Abbildung 3.1, would the price elasticity of demand be greater in point  $B$  or  $D$  for a price move of  $-1$  in each case?

**Lösung:** The demand function is linear and of the form  $P = a - b \cdot Q_D$  with  $a, b > 0$ . Hence, if we decrease  $P$  by 1 unit, we must increase  $Q_D$  by  $+1/b$  in order to stay on the demand line, i.e.  $P - 1 = a - b \cdot (Q_D - 1/b) = a - b \cdot Q_D - 1$  is equivalent to the original demand equation. We recall formula (3.3) and compute

$$\text{PED}(P(B), P(B) - 1) = \frac{P(B)}{B} \cdot \frac{\Delta Q_D}{\Delta P} = \frac{P(B)}{B} \cdot \frac{1/b}{-1} = -\frac{1}{b} \frac{P(B)}{B}$$

and, similarly,

$$\text{PED}(P(D), P(D) - 1) = \frac{P(D)}{D} \cdot \frac{\Delta Q_D}{\Delta P} = \frac{P(D)}{D} \cdot \frac{1/b}{-1} = -\frac{1}{b} \frac{P(D)}{D}$$

We know that  $P(B) > P(D)$  and  $B < D$ , hence,  $P(B)/B > P(D)/D$  and it follows that  $|\text{PED}(P(B), P(B) - 1)| > |\text{PED}(P(D), P(D) - 1)|$ , hence, the price elasticity of demand is greater for higher price and lower demand combinations. Recall the definition of the price elasticity of demand to confirm that this is in line with your intuition.



**62** Recall the demand function  $Q_D = 25.15 - 0.12 \cdot P$  from our oil example. Consider the price levels  $P_1 = 150$  and  $P_2 = 50$ . Compute the price elasticity of demand in both points using a price drop of  $\text{€} -25/\text{bbl}$ . Does this confirm the result from example 61?

**Lösung:** First we compute  $Q_D(P_1) = 25.15 - 0.12 \cdot 150 = 7.15$  and  $Q_D(P_2) = 19.15$ . We also realise that for a price drop of  $-25$ , the quantity demanded increases by  $0.12 \cdot 25 = 3$ . We hence compute

$$\text{PED}(150, 125) = \frac{\frac{10.15 - 7.15}{7.15}}{\frac{125 - 150}{150}} = \frac{42\%}{-16.7\%} = -2.52$$

and

$$\text{PED}(50, 25) = \frac{\frac{22.15 - 19.15}{19.15}}{\frac{25 - 50}{50}} = \frac{15.7\%}{-50\%} = -0.31.$$

As expected in line with the result of the previous example, the price elasticity of demand is higher for the high price-low quantity combination, i.e. for a *small* percentage change in the price, the quantity sold changes by a rather *large* percentage. In particular, we would say that

<sup>8</sup>For the interested reader: one can define the local price elasticity of a demand curve at  $P = P_1$  (i.e. for  $\Delta P \rightarrow 0$ ) as the so-called **point-price elasticity of demand**  $e_D(P_1) = [(dQ_D/Q)/(dP/P)]_{P=P_1} = [P/Q_d \cdot (dQ_D/dP)]_{P=P_1} = [P/Q_d \cdot Q'_D(P)]_{P=P_1}$ .

the demand function is *price elastic* in  $P_1$  and *inelastic* in  $P_2$ .

**LI 61** **Income and cross price elasticity:** Define the terms *income elasticity* and *cross-price elasticity*. What are *complementary* and *supplementary goods*, respectively.

Recall the general definition of the demand function at the beginning of this chapter. Not only price had an impact on the demand of a good, but also income/wealth of the buyers and the price of competing products. At a given product price level, we hence define **income elasticity of demand** as

$$\text{IED}(I_1, I_2) = \frac{\% \text{-change of demand quantity}}{\% \text{-change of income}} = \frac{\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}}{\frac{I_2 - I_1}{I_1}}$$

and the **cross-price elasticity of demand** regarding the price  $P^C$  of a competing product as

$$\text{CPED}(P_1^C, P_2^C) = \frac{\% \text{-change of demand quantity}}{\% \text{-change of price of competing product}} = \frac{\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}}{\frac{P_2^C - P_1^C}{P_1^C}}$$

Thinking of new and higher-priced cars, such as BMW or Audi, the demand can be quite income elastic. For example, during financial crisis when the average income sinks due to increased unemployment and job insecurity, the second-hand car market typically increases in size significantly, while the new car market shrinks. Governments could then, for example, step in to help the car industry and offer premiums if old high-emission cars are exchanged for new low-emission cars (a so-called scrapping premium, dt. *Verschrottungsprämie*). The demand for BMWs will typically not depend on the price of bread, so that we would expect the cross-price elasticity to be close to 0. On the other hand, the demand for BMWs will be highly cross-price elastic towards the price of Audis. It is quite easy to buy a new Audi instead of a new BMW if the Audi is much cheaper. Products which can easily be substituted for each other, such as different car brands, different investment types, different insurance contracts or holiday trips to different destinations, are called **substitute products** (and typically have *positive* cross-price elasticity). Products that naturally accompany another product (with typically *negative* cross-price elasticity) are called **complementary products**. Examples include iPhone covers and iPhones, car tyres and cars, ski poles and skies, a bank's current accounts and loans to its customers or an insurer's basic health insurance and supplementary health insurance cover.



**63** Which of the following pairs are rather (I) substitute and which are rather (II) complementary products: (a) bread and butter, (b) corporate loans and corporate bonds, (c) iPhones and Samsung Galaxy phones, (d) critical illness insurance and private health insurance, (e) cars and petrol, (f) t-shirts and polo shirts, (g) saving accounts and investments in government bonds, (h) beer and wine and (i) cars and motorcycles.

**Lösung:** Rather complementary are (a) and (e), while (b), (c), (d), (f), (g), (h) and (i) are all rather substitute goods (you can generally substitute one product by the other one).

**LI 62** **Competition, monopolistic competition, oligopoly, monopoly:** Explain the terms *competition*, *monopolistic competition*, *oligopoly* and *monopoly*, and outline the characteristics of each market type. What is the impact of the respective market form on the finding of the price. What is a natural monopoly?

While our demand considerations were relatively general, we have assumed for the supply side that many producers would compete against each other, finally leading to a price-quantity equilibrium. This, however, is not always the case. We distinguish various types of supply markets:

- **Open competition:** many (smaller) firms produce almost identical products, markets are typically well-developed or have low barriers of entry. Overall market demand and supply determine the market price, typically no single firm can influence the market price. An example would be the local markets for sugar, flour or white printing paper.
- **Monopolistic competition:** similar to open competition, but products differ slightly. Examples would be the markets for writing pens, household cleaning product, bread or fruits. Each producer faces a downward sloping demand curve, as with an increasing price less of the product is demanded. Generally, it is possible to substitute one toothpaste for another, however, the timing of the decision to actually switch as prices rise will differ from consumer to consumer.
- **Oligopoly:** in oligopolies there are typically only a few major competitors. For example, most of the mobile phone market is split between few players such as Apple, Samsung, Nokia, HTC, Blackberry. Oligopolies typically occur in industries with **high barriers to entry**. This might be due to high development or research costs, patents or legal protection, large initial investments or very high fixed costs, or technological know-how. Typical industries include automotive, pharmacy, oil production, IT hardware (at the innovation stage), typically banking/insurance, reinsurance or motorway construction. Pricing decisions of single suppliers affect their quantity sold, but also the quantity sold of others - i.e. cross-price elasticity is worth studying.
- **Monopoly:** only a single supplier sells the product. It is difficult or impossible for consumers to find substitutes for the product. A monopoly can be temporary due to a new technology or product, or when the supplier is protected legally by patents. There also exist **natural monopolies**, where the product can only be offered at reasonable costs when there is only one supplier. This can be the case with very high fixed costs and very low variable costs, so that the product is only affordable when sold at large quantity. In the past, natural monopoly industries included train transportation, postal services, electric power production or drinking water. Such industries, however, get privatised over time and become oligopolies as new resources or technologies become available.

Table 3.1 finally summarises some key features of the above supply structures (cf. Schweser [44]):

	Open Competition	Monopolistic Competition	Oligopoly	Monopoly
# of suppliers	Many	Many	Few	One
Barriers to entry	Very low	Low	High	Very high
Availability of substitutes	Close/identical	Good	Close/Good	No immediate
Competition through	Price	Price, features, marketing	Price, features, marketing	marketing
Pricing power	None	Some	More	Significant

**Tabelle 3.1:** Characteristics of various types of supplier structures.

**LI 63** **Profit maximisation, economies of scale and scope:** *Suppose you are a monopolist and aim to maximise your profit from selling a product, given variable and fixed costs. Explain the terms economies of scale and economies of scope.*

Suppose there is only one supplier of a certain product, hence, we face a market monopoly. Even though prices for monopolies are often regulated, assume that the producer can choose freely. She

would like to maximise her profit, given variable costs  $V_c$  per unit produced and sold and fixed costs  $F_c$  if production is started. The quantity demanded  $Q_D$  at a certain price  $P$  is again given by a demand equation  $Q_D = a - b \cdot P$  with  $P, Q_D \geq 0$ . We compute for the profit  $S$  that

$$\begin{aligned} S &= (P - V_c) \cdot Q_D - F_c = (P - V_c) \cdot (a - b \cdot P) - F_c \\ &= -b \cdot P^2 + (a + b \cdot V_c) \cdot P - a \cdot V_c - F_c. \end{aligned} \quad (3.4)$$

The profit is hence a *quadratic function* of the price, which attains its local maximum in  $P = P^*$  if  $S'(P^*) = dS/dP|_{P=P^*} = 0$ . We derive  $S'(P) = -2 \cdot b \cdot P + a + b \cdot V_c$  so that

$$P^* = \frac{a + b \cdot V_c}{2b}. \quad (3.5)$$

If  $P^*$  refers to a positive quantity, we have determined the price at which the monopolist's profit is maximised.

If  $F_c$  is very large, so that the production price per produced unit becomes much smaller for larger quantities, we call this effect **economies of scale** (dt. *Skaleneffekt*). Conversely, if the production per unit becomes much cheaper if the producer also produces other, different products, this effect is called **economies of scope** (dt. *Verbundeffekt*). Economies of scale can exist due to the use of energy (e.g. wind power, or the running of a steam machine), the advantages from specialised division of labour during the production process, automatisisation of processes (e.g. when using robots) or relative lower costs of larger production means (factories, furnaces, tubes, tanks). Economies of scope are often based on synergies between different production processes such as using waste from one process as material for other product, low distances (e.g. call centers for various companies can use same IT system, phone and electricity installations) or streamlining of sales process (selling two products together, such as compulsory and additional health insurance).



**64** Suppose that there is only one supplier of oil in a market. The demand is given by  $Q_D = 25.15 - 0.12 \cdot P$  (in million barrels). The producer has fixed costs of  $F_c = 130,000,000$  and the variable production costs are €22/bbl. How will this monopolist supplier set the price to maximise its profit?

**Lösung:** By formula (3.5) we calculate directly

$$P^* = \frac{25,150,000 + 120,000 \cdot 22}{2 \cdot 120,000} = 115.8.$$

The total profit of the producer will then be

$$S = (115.8 - 22) \cdot (25,150,000 - 120,000 \cdot 115.8) - 130,000,000 = \text{€}925.6\text{mn}$$

and the produced and sold quantity of oil is 11.3mn bbl oil.

**LI 64** **Herfindahl-Hirschman Index:** Explain the use of the Herfindahl-Hirschman index (HHI) to measure supplier concentration in a market. What is the effect of mergers/acquisitions on the HHI?

For describing the market power of single suppliers in a market or when measuring the degree of monopoly/oligopoly, one can turn to **concentration measures** regarding the market shares of the

single suppliers. The **Herfindahl-Hirschman Index (HHI)** is an often-quoted example of such a measure. Suppose suppliers  $i$  are ordered by their market shares (of sales)  $s_1 > s_2 > s_3 \dots$ . The  $N$ -supplier HHI is then the sum of squared market shares for the  $N$  largest suppliers, i.e.

$$HHI(N) = (s_1)^2 + (s_2)^2 + \dots + (s_N)^2. \quad (3.6)$$

Can you explain why  $0 < HHI(N) \leq 1$  holds for all  $N$ ? A relatively high number tells us that the supplier market is concentrated around few firms with then high pricing power. A low number tells us that supplier market is fairly granular, with little pricing power for any one company.



**65** Insurance companies are typically ranked by their (net) premium volume written in a year. Consider the following ranking of global reinsurance companies for 2012 (cf. S&P's [46]). Calculate the HHI(4) and explain the result.

Rank	Company	Home	Premiums (2012) (USDmn)	Share
1	Munich Reinsurance Co.	Germany	35,797.2	19.3%
2	Swiss Reinsurance Co.	Switzerland	25,344.0	13.7%
3	Hannover Rueckversicherung AG	Germany	16,346.0	8.8%
4	Berkshire Hathaway Re	U.S.	16,145.0	8.7%
5	Lloyd's	U.K.	11,372.7	6.1%
6	SCOR SE	France	11,285.6	6.1%
7	Reinsurance Group of America, Inc.	U.S.	7,906.6	4.3%
8	PartnerRe Ltd.	Bermuda	4,573.0	2.5%
Total industry			185,449.2	

**Lösung:** The HHI is calculated as

$$HHI(4) = 0.193^2 + 0.137^2 + 0.088^2 + 0.087^2 = 0.071.$$

Despite there being no monopoly, the largest 4 reinsurers generate 50% of the business measured by net premiums. In certain non-standard products especially Munich RE and Swiss RE should have some pricing power, while in other standard reinsurance lines the pricing power might be limited due to the large number of competitors. In the food industry, for example, the HHI would be significantly lower given its very granular base of suppliers. The largest food company, Nestlé, only generates about 2% of global food sales.

## 3.2 Macroeconomic Concepts

**LI 65** **GDP:** Define the Gross Domestic Product (GDP) using (a) the production and (b) the expenditure approach.

The **gross domestic product** (GDP; dt. *Bruttoinlandsprodukt* bzw. BIP) is the aggregate market value of all goods and services produced in a country within a given period of time, typically a year.

Under the **production approach**, the GDP does not include the sale of goods and services produced in previous years. Under the **final-value method**, only the values of finished products are summed, while under the **value-added method** the values added at the single stages of the production process

are summed. For example, when a jeweler sells a ring for €2,000, one could either include this final price as the ring's value in the GDP, or the 1,200 when producing the raw materials, the 600 for forming the material into a ring (manufacturing) and the 200 value-add from the retail sales stage separately. The sum is again  $1,200 + 600 + 200 = 2,000$ .

On the other hand, we can check who paid for all the goods and services, and just sum up all those spendings under the **expenditure approach**. In particular, we add up the purchases by consumers (C), the local government (G), companies (I) in the form of investments in inventory or means of production and foreign buyers as exports (X). Then we need to subtract imports (M) from those spendings, since those goods produced abroad are not included in the GDP. Hence, we can also compute the GDP as

$$\text{GDP} = C + I + G + X - M. \quad (3.7)$$

The results might differ slightly under the expenditure and the production approach, since the numbers are based on different data sets. The GDP computed by simply adding up the actual market prices of the produced goods and services is called **nominal GDP**.



**66** Go to Statistik Austria's website [statistik.gov.at](http://statistik.gov.at) and find the Austria's 2013 figures for imports, exports, consumer spending, gross investments by corporates, government spendings and verify that the 2013 GDP was €313.2bn.

**Lösung:** By selecting the following positions from the national accounts table

National accounts position	€mn
Consumption expenditure of households ( $C_1$ )	167,526
Consumption expenditure of NPISH ( $C_2$ )	4,790
Gross capital formation ( $I$ )	67,330
Consumption expenditure general government ( $G$ )	58,975
Exports ( $X$ )	179,905
Imports ( $M$ )	165,357
$C_1 + C_2 + I + G + X - M$	313,169

Note that the term NPISH means *Non-profit institutions serving households* and Gross capital formation reflects the companies' investments. Note that Austria is a **net exporter** as  $X - M > 0$ , while other countries, such as the US or the UK are **net importers**. You probably experienced that it actually takes some time to find the right numbers when going through the national accounts. National account figures are also provided at Eurostat's homepage [epp.eurostat.ec.europa.eu](http://epp.eurostat.ec.europa.eu).

**LI 66** **Nominal, real and PPP GDP, GDP deflator:** Define the terms nominal GDP, real GDP, PPP GDP and GDP deflator.

As we noted before, **nominal GDP** is simply the sum of the current values of all goods and services produced. Normally current market prices are used to value the products. Hence, for each good we simply multiply the *quantity  $q_i$  produced in year  $t$*  times *price  $p_i$  in year  $t$* . For  $n$  different goods, the

nominal GDP is then simply given by

$$\text{GDP}_{\text{nom}}(t) = p_1(t) \cdot q_1(t) + p_2(t) \cdot q_2(t) + \dots + p_n(t) \cdot q_n(t) = \sum_{i=1}^n p_i(t) \cdot q_i(t). \quad (3.8)$$

In contrast to this, **real GDP** values the quantity of goods and services produced today using prices of some *past reference year*. For example, we could compute the 2013 GDP through valuing 2013 output by using 2005 prices. This will make it easier to ignore the fact that prices have risen due to inflation and help to evaluate how much production has grown since 2005. Using the *base year*  $t_0$ , the real GDP is given by

$$\text{GDP}_{\text{real}}(t, t_0) = p_1(t_0) \cdot q_1(t) + p_2(t_0) \cdot q_2(t) + \dots + p_n(t_0) \cdot q_n(t) = \sum_{i=1}^n p_i(t_0) \cdot q_i(t). \quad (3.9)$$

The ratio

$$D(t, t_0) = \frac{\text{GDP}_{\text{nom}}(t)}{\text{GDP}_{\text{real}}(t, t_0)} \quad (3.10)$$

is called **GDP deflator** and can be used as indicator how much price levels have risen over the period  $t_0$  to  $t$ . Hence, the GDP deflator can be used as alternative to other price indices, such as the **consumer price index** (CPI) which you might know. Due to population sizes greatly varying between countries, one often computes the **GDP per capita** (i.e. GDP *divided* by population size) to compare the output per person. According to the IMF, the 2013 GDP per capita values (in US\$) were 81,323 for Switzerland, 48,956 for Austria, 29,150 for Spain, 11,766 for Argentina and 6,747 for China.

However, the above comparison does not tell us how well people live in their countries with the US\$-output they produce. Hence, and as price levels of products such as food, housing, transportation etc. can vary greatly between regions, one often calculates the so-called **purchasing-power adjusted GDP** (also: **PPP GDP** for 'purchasing-power parity') by multiplying the GDP by a factor reflecting price levels in the respective economy (sometimes people refer to it as: *purchasing-power exchange rate*). This factor is often chosen relative to price levels in the US, since GDPs are mostly reported in US\$.



**67** In an economy only three products are produced. Consider the following output ( $q$ ) and price ( $p$ ) development in this economy for the years 2005 and 2013.

Product	$q(2005)$	$p(2005)$	$q(2013)$	$p(2013)$
A	120	11	230	14
B	50	180	60	185
C	600	9	500	8

Compute  $\text{GDP}_{\text{nominal}}(2005)$ ,  $\text{GDP}_{\text{nominal}}(2013)$ ,  $\text{GDP}_{\text{real}}(2013, 2005)$  and the GDP deflator  $D(2013, 2005)$ .

**Lösung:** We compute

$$\text{GDP}_{\text{nominal}}(2005) = 120 \cdot 11 + 50 \cdot 180 + 600 \cdot 9 = 15,720,$$

$$\text{GDP}_{\text{nominal}}(2013) = 230 \cdot 14 + 60 \cdot 185 + 500 \cdot 8 = 18,320,$$



$$\text{GDP}_{\text{real}}(2013, 2005) = 230 \cdot 11 + 60 \cdot 180 + 500 \cdot 9 = 17,830$$

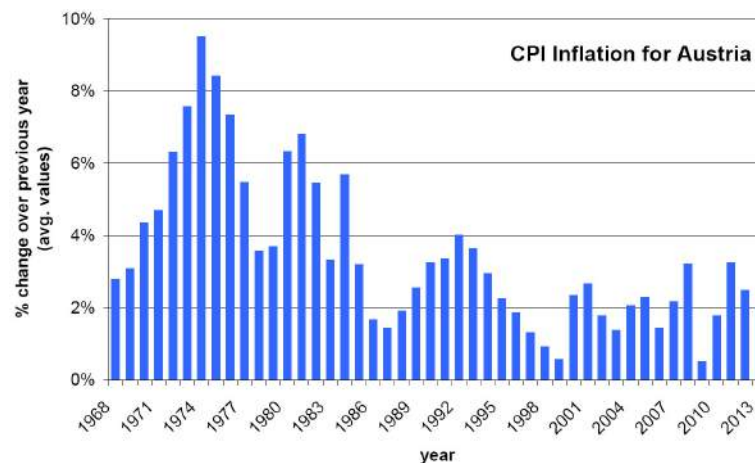
and

$$D(2013, 2005) = \frac{18,320}{17,830} = 1.027.$$

Producers maybe expected the price of product A to increase and of product B to drop. Hence, some productive resources were re-allocated from product C to product A. This was a smart move contributing to a solid increase in nominal GDP. Also real GDP has increased so that overall production has grown. With some increases (products A, B) and a decrease in price levels (product C), the deflator shows only a small overall increase in prices at 2.7%.

**LI 67** **Inflation, deflation:** Explain the terms inflation and deflation and give examples why they have occurred in the past. How can inflation be measured?

When we speak of **inflation**, we mean a rise in the price levels of a market. In particular, inflation is measured by the percentage a certain *price index* rises. We have already discussed the *GDP deflator* as example of such an index. Other commonly used indices include the **Consumer Price Index (CPI)** (dt. *Verbraucherpreisindex*) or the *Retail Price Index* (as used in the UK). For the CPI, a market basket of consumed goods and services is defined, and observed prices are weighted by their respective weights in the basket. The composition of the basket is based on a survey amongst households regarding consumption behaviour. Price changes of Austria's CPI are depicted in Abbildung 3.5. For the Eurozone, the European Central Bank publishes the **Harmonized Index of Consumer Prices (HICP)** which is a weighted index of the indices reported by the member states.



**Abbildung 3.5:** Austria's inflation based on its consumer price index (VPI 66, 76, 86, 96; data source: statistik.at)).

A fall in price levels, on the other hand, is called **deflation**. **Hyper-inflation** refers to very high and out-of-control increases in prices (e.g. Germany (1923) up to 29'525% monthly, Argentina (1990) up to 190% monthly or Poland (1989/90) up to 75% monthly after the liberalisation of (food) prices). Generally high inflation is seen as bad for developed economies as consumers tend to consume today rather than to save. In very extreme cases of hyperinflation, the monetary system can break down, and consumers switch to a **barter economy** (dt. *Tauschhandel*). As of 2013, the central banks of the Eurozone, the US or the UK see an inflation rate of approx. **2%** as healthy. Deflation can also be a serious economic problem: as consumers expect falling prices, they save money to consume in the future rather than today, which can slow economic growth. As a reaction to deflation, central

banks would typically try to lower interest rates and to provide more money overall, in order to make spending relatively more attractive. However, if deflation is strong, the effect of these measures will be limited. Japan has had problems with deflation since the early 1990s. This was due to falling stock and real estate prices (after the bubble of the 1980s), an aging population, problems in the banking sector and price decreases of imported goods.

Suppose the variable  $p_i(t)$  indicates the observed price at time  $t$  of a product, and  $q_i(t)$  denotes the quantity at which it is included in a *market basket* at time  $t$ . The two most common ways of computing price indices are (a) using a value of 100 for the base year  $t_0$  and (b) choosing the market basket as in (b.1) the base year (**Laspeyres index**  $P_L$ ) or (b.2) the current year  $t$  (**Paasche index**  $P_P$ ), i.e.

$$P_L = \frac{p_1(t)q_1(t_0) + \dots + p_n(t)q_n(t_0)}{p_1(t_0)q_1(t_0) + \dots + p_n(t_0)q_n(t_0)} \times 100 \quad \text{and} \quad P_P = \frac{p_1(t)q_1(t) + \dots + p_n(t)q_n(t)}{p_1(t_0)q_1(t) + \dots + p_n(t_0)q_n(t)} \times 100.$$



**68** Compute the annual average inflation, based on the Paasche index, using the following data (market baskets for the base year 2007 and the current year 2013). Note that the market basket will change over time as consumption behaviour changes (and hence the weighting of the prices).

Item	$p_{2007}$	$q_{2007}$	$p_{2013}$	$q_{2013}$
Food	12	30	18	32
Energy	4	12	5	20
Petrol	1	21	1	24
Clothing	23	5	24	8

**Lösung:** In the current example we therefore compute

$$P_P(2013; 2007) = \frac{18 \cdot 32 + 5 \cdot 20 + 1 \cdot 24 + 24 \cdot 8}{12 \cdot 32 + 4 \cdot 20 + 1 \cdot 24 + 23 \cdot 8} \cdot 100 = 132.7.$$

The total price increase over the 6-year period was hence 32.7%, or on average  $\sqrt[6]{1.327} - 1 = 4.8\%$  per year. What are the (dis)advantages of using a Paasche or a Laspeyres index, respectively? How well does such a computation of inflation capture how much more expensive (in nominal terms) life has become? Finally, go to [www.statistik.at](http://www.statistik.at) and find out how the market basket is currently composed for Austria ('Warenkorb und Gewichtung', H/VPI).

**LI 68** **Unemployment:** Explain what different forms of unemployment we distinguish. How is unemployment measured?

Unemployment can be *voluntary* or *involuntary*. Voluntary unemployment is due to the individual's decision of not working, also upon turning down a low-wage job opportunity. Involuntary unemployment can exist due to market downturns, a decline of certain industries, government intervention (e.g. defining a minimum wage level), or the downsizing or failure of a corporation. In particular, one often distinguishes:

- **Structural unemployment:** occurs when the labour market does not manage to provide jobs to everyone due to lack of natural resource or, more importantly, a mismatch between offered and required skills. Unemployment due to technological changes or also seasonal unemployment is often counted as structural. It can be difficult to address structural unemployment.

- *Cyclical unemployment*: cyclical unemployment occurs when demand falls, and firms downsize production in response to the momentarily low demand level. Unemployed receive temporarily unemployment benefits, the government tries to encourage demand by lowering interest rates or increasing government spendings, and as demand picks up again, employment levels rise. This kind of unemployment is hence not permanent, and governments and central banks can try to address it by implementing monetary or fiscal measures.
- *Frictional unemployment*: is also called *search unemployment* and refers to the temporary unemployment from leaving one job until finding another one simply due to the fact that finding a job - i.e. matching labour demand and supply - takes time.
- *Hidden unemployment*: is not reflected in official statistics. This might be due to unemployed individuals not looking for jobs actively (i.e. not registered with employment services), undergoing retraining programs, receiving disability benefits or being forced into early retirement models where they would prefer to still be working. Also the *underemployed* (i.e. those only working few hours per week) are often not captured in unemployment statistics.

The International Labour Organization provides detailed reports on global unemployment levels, as well as their breakdowns and sources (see ILO [35]). EU unemployment data is collected at [epp.eurostat.ec.europa.eu](http://epp.eurostat.ec.europa.eu), at the beginning of 2014, for example, the EU-wide unemployment rate was reported at around 10%.

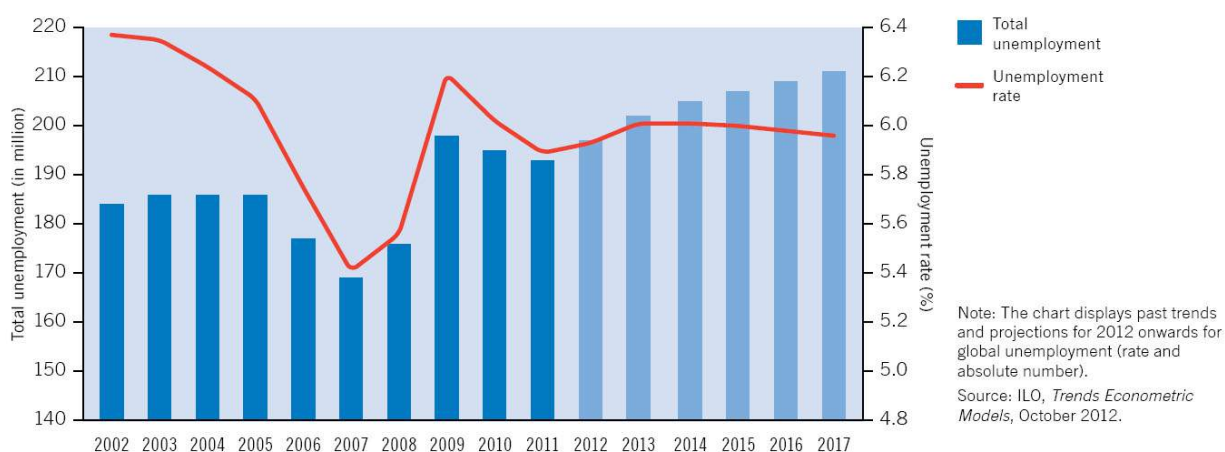


Abbildung 3.6: Global unemployment trends and projections (source: ILO [35], p16).

**LI 69** **Economic growth, measurement:** *What are the sources of economic growth? How can economic growth be measured?*

**Economic growth** refers to the ability of an economy to increase the market value of its produced goods and services. Economic growth is often measured (a) by the change in real GDP (i.e. the change in output is inflation adjusted) or (b) a change in (real) GDP per capita.

Economic growth as an expansion in an economy's potential output can be related to the following factors:

- **Natural resources:** economies with many natural resources often enjoy faster growth as they (a) transform their resources into goods or (b) sell them to other economies. If resources are *non-renewable* (e.g. oil, coal, iron) accelerated growth from exploiting those resources can be temporary.

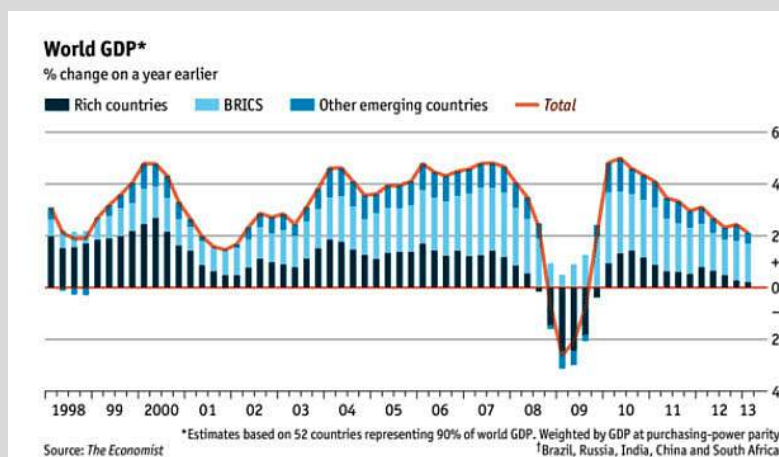
- Human resources: the change in the number of individuals who are able to work ('labor force': currently employed, in training or unemployed) can depend on a population's age structure, birth rates and net immigration. Skills and education ('human capital'), on the other hand, can enable the available workforce to work more effectively and produce more complex products which achieve higher market prices. Labor force and human capital are important sources of economic growth.
- (Physical) Capital: capital stock is seen to have a key positive impact on economic growth, it requires savings in the first place and includes machinery, property and infrastructure. Higher capital allows more efficient production processes ('industrialisation').
- Inequality in wealth: rising inequality in the distribution of wealth is often thought to have a negative impact on economic growth. A high inequality in wealth is often linked to high unemployment, which is often accompanied by less overall consumption, a lower level of human capital, poverty and social unrest. An economy's inequality of wealth or income is sometimes measured by the **Gini index**.
- Technological progress: new technologies can be key to improving the efficiency of production processes and to allow the production of new products.

Note that economic growth is only a monetary measure. Economic growth can negatively effect the environment through increased pollution, an exhaustion of resources and the happiness of individuals. Also wars are often accompanied by economic growth of some economies due to an increased demand for weaponry, textiles and building materials.



69 Comment on the GDP growth in rich regions vs. BRICS vs. other emerging countries over the 15-year period from 1998 to 2013.

**Lösung:** The following graph is borrowed from The Economist (2014).

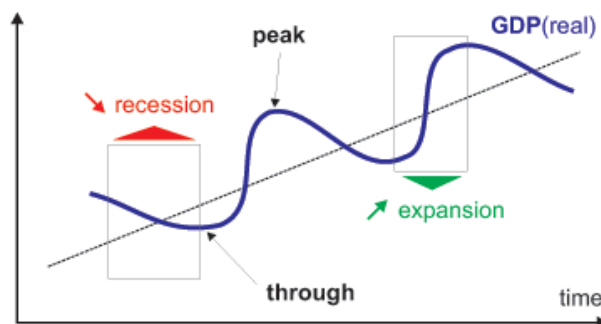


According to The Economist, global annual GDP growth has declined to just above 2% in March 2013 from almost 5% in 2010. We can see that in the years 1998 to 2000, a significant part of the growth came from industrialised countries. After the burst of the dotcom bubble in 2000 this, however, changed. The period 2008 to 2010 illustrates that growth in the BRICS countries is also based on investments from and consumption by industrialised countries. As growth in the western world became negative, also growth in BRICS countries tumbled significantly. As

a point of reference, the US and Europe together account for about 46% of the world's GDP (approx. US\$ 75,000bn), the BRICS countries produce about 22% (with China making up more than half of this; source: IMF).

**LI 70** **Economic cycles:** Explain the driving forces which cause fluctuations of economic growth rates. Explain the terms expansion, peak, recession and through. What are automatic stabilisers?

The economy has been observed to move somewhat cyclically. We differentiate phases of (a) **expansion** (positive economic growth) and (b) **recession** (negative economic growth, also: *contraction*). An expansion ends in a **peak** and a recession ends in a **through**. When we observe no significant negative or positive growth over a period of time, we speak of **economic stagnation**. Periods of long negative economic growth are usually referred to as **depression**. These continual changes over time from periods of expansion to recession, and vice versa, are often referred to as the **economic cycle** or business cycle (see Abbildung 3.7). Economists have investigated economic cycles as early as in the 1800s (R. Owen 1817, J.C.L. de Sismondi 1819, C.Juglar 1860), which set the basis for comprehensive economic research. Even K. Marx dedicated a significant part of his work *Das Kapital* to economic crises.



**Abbildung 3.7:** Illustration of an economic cycle: expansion-peak-recession-through

The economic cycle impacts consumption, corporate production, real estate markets, and credit and stock markets. Note that recessions (and: depressions) often start with shocks rather than gradually: the Black Friday at Wall Street in 1929 (followed by the great depression), the oil price shock and following stock market crash in 1973 (followed by the crisis of the late 70s that was accompanied by high inflation and high unemployment), the burst of the dotcom bubble in 2001 or the 2007/08 Credit Crunch (followed by years of mediocre growth and another crisis - the European sovereign debt crisis in 2010).

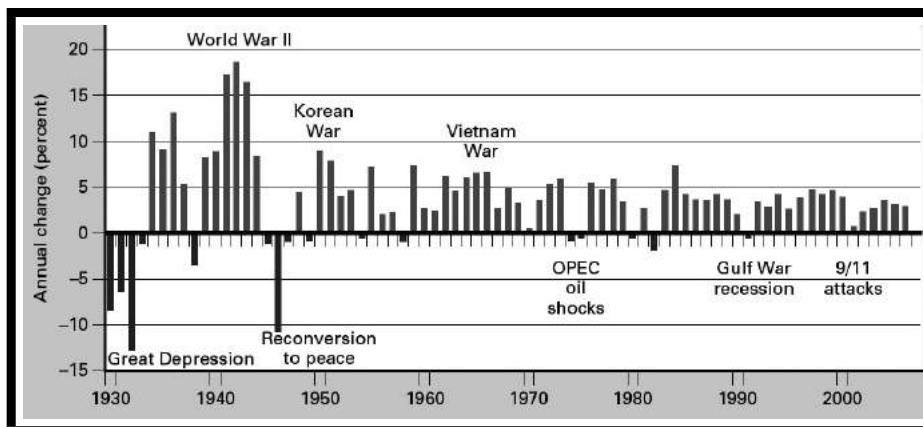
The following characteristics are typically associated with the respective phases in the economic cycle:

- **Expansion:** real GDP growth accelerates (due to optimism, new/higher demand, new technologies etc.), consumption increases, firms hire more staff, unemployment falls, business investment increases to expand production and meet higher demand, inflation can increase if demand grows stronger than supply, strong production of commercial real estate
- **Peak:** consumption growth is slowing ('saturation'), the economy has reached high employment levels, inflation slows as demand increases only slowly, 'people start to feel that growth is slowing', investors move part of their wealth to other markets with higher growth expectations, production of commercial real estate slows

- *Contraction (recession)*: real GDP growth becomes negative - possibly due to concerns that firms might not be able to repay debts, rising prices for natural resources (e.g. oil, coal, sugar), investors lose money if stock/asset prices drop, consumption falls, firms downsize operations and unemployment rises, inflation generally decreases, production of commercial is stopped (current projects are finished but partly vacant)
- *Through*: new sources of growth are found, negative real GDP growth becomes positive again, firms are preparing for a growth period, the now high unemployment starts to fall, this encourages higher consumption, inflation increases slightly, transition to expansion phase

**Note 1.** The *housing* and the *credit market* are often closely linked to economic growth. In an economy with many younger individuals (e.g. of 25-40 years) and sufficient funds to finance new housing, significant economic growth can come from the real estate/housing sector. Much of (a) our consumption and (b) corporate growth today is financed by credit. A well-functioning and liquid credit market is hence seen as requirement for sustained economic growth.

**Note 2.** Governments and central banks try to slow strong growth to 'healthy' rates and stimulate slow growth by so-called *monetary instruments* (e.g. controlling interest rates, controlling the amount of money) and *fiscal instruments* (e.g. taxation, government spending). Some such instruments are called **automatic stabilizers**, i.e. they are installations that automatically slow positive growth and encourage consumption when growth is slow or negative. One example is *progressive tax systems*, where more tax is paid overall with rising income during growth periods, which brings down potential consumption a little. On the other hand, when income falls, less tax is paid and consumption does not fall as much as income. Similarly, *unemployment insurance* brings down consumption during periods of low unemployment and encourages consumption during recessions.



**Abbildung 3.8:** Cyclicity of US GDP growth (source: McEachern [29], p102).

**LI 71** **Coinciding/leading/lagging indicators:** Name leading, lagging and coinciding indicators and explain how they can help to determine an economy's position in the cycle.

In order to detect if an economy is expanding or contracting, analysts follow a variety of economic indicators (dt. *Konjunkturindikator*). We distinguish:

- *Leading indicators* (dt. *Frühindikatoren*): typically change before the economy changes. They can therefore be used as short-term predictors of what the economy will do.

- Lagging indicators (dt. *Spätindikatoren*): typically change after the economy has changed. The lag is due to participants in the economy adjusting their actions (production, unemployment levels) mostly only after the economy has changed. Lags are mostly a few quarters.
- Coincident indicators (dt. *Präsenzindikatoren*): typically change at roughly the same time as the economy. Be reminded though that data is reported with delay, and e.g. only published quarterly, so that also coinciding indicators have some time lag.

Examples of **leading indicators** are:

- *Average weekly work hours* (manufacturing): working hours are often adjusted downwards before unemployment increases
- *Building permits* for new private houses: can indicate future economic activity in the construction sector. A related indicator is the weekly number of *applications for new mortgages*.
- *Inventories of firms* (typically measured as inventories/sales): decreasing inventories divided by sales can indicate growth in the next few quarters, as companies have sold more than expected and are typically trying to rebuild their inventory base. Conversely, rising inventories can mean that companies will slow production in the next few quarters as they are struggling to sell their products.
- *Stock prices*: the stock market is forward looking, and prices typically fall before an economy enters recession. Note that falling stock prices can worsen economic crises as households might have less money for spending due to their stock market losses.

Examples of **coincident indicators** are:

- *GDP*: you can follow this indicator as the economy grows or shrinks.
- *Industrial production*: decreases as economic growth slows.
- *Personal income* (less transfer payments, such as unemployment money).

Examples of **lagging indicators** are:

- *Unemployment rate* and *average duration of unemployment*: especially in social market economies, unemployment rises or falls with a lag after economic growth decreases or increases
- *Outstanding consumer loans*: as consumption declines, the volume of outstanding consumer loans typically falls.
- *Interest rates*: governments typically lower interest rates to refuel economic growth.
- *CPI*: a change in demand and supply also impacts the inflation rate; sometimes one only focusses on the CPI for services as lagging indicator.

The *Conference Board* is a US-based NGO that collects data and publishes a leading (LEI), coincident (CEI) and lagging (LAG) index. Another data provider is the OECS with its Composite Leading Indicator (MEI). In Abbildung 3.9 we observe that the leading index indeed fell prior to the coincident index when a recession was entered (2001 and 2008/09: the areas are shaded in grey). Note that

stock market movements as reflected in the S&P 500 index are factored into the computation of the LEI, so that we cannot simply sell stocks to profit from following the LEI. Another issue is our **look-back bias**: we intuitively assess the performance of the index by its prediction of past events (e.g. recessions) that we know occurred; on the other hand such indices are also known to have predicted recessions that did finally not occur, so that further analysis might be required before deciding to base economic decisions on such an index.

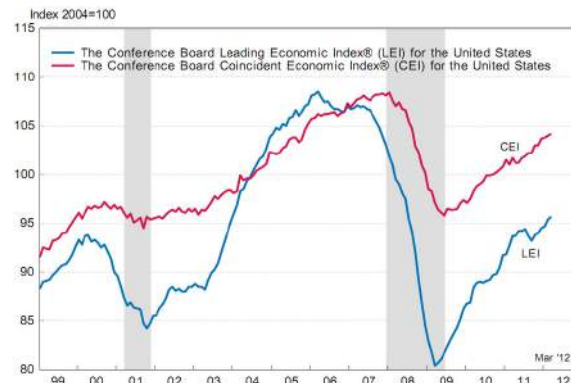


Abbildung 3.9: Leading and coincident indicator for the US market (source: easynomics.com).

### 3.3 Monetary and Fiscal Policy

**LI 72** **Monetary and Fiscal Policy:** *Explain the difference between monetary and fiscal policy. Give examples for each both types. Who decides on and implements respective policy measures?*

A government generally generates earnings through taxation of some sort, which it can spend e.g. on administration, the provision of public services (schooling, healthcare, state pensions), infrastructure creation and maintenance, and social expenditures. The difference earnings *minus* spendings is called **budget**. If a budget is positive it is called **budget surplus**, if it is negative it is called **budget deficit**. **Fiscal policy** (dt. *Fiskalpolitik*) refers to a government's actions regarding (a) taxation, (b) wealth/income redistribution (so-called **transfer payments**) and government spending with the aim of influencing economic activity. Fiscal policy measures could include (a) a lowering of corporate taxation to attract currently foreign businesses, (b) the building of new infrastructure (e.g. new motorways, airports, buildings etc.) to provide employment during economic downturns or (c) the cutting of social benefits with the aim of obtaining higher employment levels.

Central banks watch over the amount of money and credit available to private individuals and businesses within an economy. By increasing (or decreasing) the amount of money and credit available, it can aim to influence private spending, as well as economic production and growth. All such actions by a central bank with the target of influencing economic activity are summarized as **monetary policy** (dt. *Geldpolitik*).

Both monetary and fiscal policy can be **expansionary** (by increasing government spending, or driving up the amount of money and credit) to encourage economic growth, or **contractionary**.



**LI 73** **Money:** Explain the process of money creation and the functions of money. In particular, what are the money measures  $M1$ ,  $M2$  and  $M3$ ? What is the money multiplier?

An economy where no money exists and goods are traded directly (e.g. medical services for food, milk for meat, building materials for gold or jewelry) is called **barter economy**. On the contrary, in a **money economy** goods are valued in terms of monetary units (e.g. euros), and participants in this economy accept money as payment in exchange for goods.

**Money** therefore serves as (a) a medium of exchange (or: payment), (b) a valuation unit for goods and services provided, and (c) a way to preserve value over time (you provide a service today, but can keep the money to buy fresh food only in a week from now).

Already in the early days, people started to use precious metals (gold, silver, copper) as a currency when trading goods. People would find it practical to deposit their precious metals with a custodian (or: bank), and in return they received a *claim check* that promised in writing that they would receive back the deposited metals upon request. Soon people would trade only the claim checks rather than the metals themselves. Banks on the other hand, realized that people would never withdraw all the deposited metals at the same time, so that they would lend a portion of the precious metals (in the form of claim checks) to people who needed them at the time to purchase goods in exchange for repayment *plus interest* in the future. The amount of claim checks was hence larger than the amount of deposited precious metals, which marked the birth of the so-called **fractional reserve banking**. Today a majority of the money only exists as electronic deposit entries in a bank's book.

Money creation within the Euro area works through (a) currency issued by the central banks<sup>9</sup> and (b) money created through borrowing and lending by commercial banks:

- **Central banks** can distribute currency by (a) buying assets such as foreign currency, metals<sup>10</sup>, real estate or securities (e.g. government bonds), or by (b) lending to commercial banks. Money created by the central bank includes coins, notes and central bank deposit accounts of commercial banks.
- **Commercial banks** can create money simply by lending to non-bank customers. If someone borrows money from a bank to buy a car, the seller of the car would most likely deposit the money with his/her bank. This lending-spending-depositing has created additional money in the form of bank deposits.
- If the commercial bank receives €100 in deposits, it has to keep a fraction of this amount in a reserve account (mostly with its central bank), say this is  $R = 10\%$  i.e. €10. This is known as **minimum reserve requirement**. It can use the remaining amount, i.e. €90, to make again loans to non-banks (and create more money). The new borrower will spend the money to someone who deposits again the €90. The bank has to again keep 10% of the €90 as reserve, but can lend again  $€90 - 10\% \cdot 90 = 81$  to a new borrower. This process of money creation through lending-spending-depositing can continue forever, so that with an initial deposit of

<sup>9</sup>Simplifyingly we can think of central banks as the banks for commercial banks.

<sup>10</sup>This is how gold reserves used to be created.

€100, the commercial bank can potentially create

$$100 + 0.9 \cdot 100 + 0.9^2 \cdot 100 + \dots = \frac{1}{1 - 0.9} \cdot 100 = 10 \cdot 100 = \text{€}1000.$$

The multiplier  $10 = 1/(1 - 0.9)$  or, more generally,  $m = 1/R$  is called **money multiplier**.

- The central bank can, for example, influence the total money supply by lowering (increase) or raising (decrease) the minimum reserve requirement.<sup>11</sup>

When we talk about money (supply) in the following, we refer to its broader meaning as liquid assets that can be used to purchase goods and services. The European Central Bank defines three different measures of how much money there is available, **M1**, **M2** and **M3**:<sup>12</sup>

- $M1 = (1)$  Notes and coins in circulation +  $(2)$  Overnight deposits<sup>13</sup>
- $M2 = M1 + (3)$  Deposits with an agreed maturity of up to 2 years or redeemable upon notice (with a notice period of a maximum of 3 months).
- $M3 = M2 + (4)$  Repurchase agreements (Repos) +  $(5)$  Fund shares with a maturity of up to one year (so-called: **money market** shares, e.g. government bonds with a 9 month maturity at issuance) +  $(6)$  Debt securities with a maturity of a maximum of 2 years



**70** As of the end of February 2014, the following amounts were outstanding in the Euro area (all amounts in €billions): currency in circulation (919), overnight deposits (4,574), deposits - agreed maturity  $\leq 2$  years (1,663), deposits - redeemable at notice within 3 months (2,117), repos (313), money market shares (427), debt securities - maturity up to 2 years (87). Compute the money available in the Euro area by calculating the M1, M2 and M3 measure.

**Lösung:** Verify that  $M1 = 5,493$ ,  $M2 = 9,273$  and  $M3 = 10,100$ . Note that the currency in circulation is only about 9.3% of the entire existing (also electronic/certificated) Euro money. Try to find this information on [www.ecb.europa.eu](http://www.ecb.europa.eu).

**LI 74** **Inflation II:** Explain the concepts of expected and unexpected inflation. What are the effects of expected inflation on the economy? What are the impacts of unexpected inflation?

Some weighted index of the prices of selected goods (e.g. the consumer price index (CPI)) shall be  $P_t$  at time  $t$  (in years). The percentage change of the index over the most recent 12-month period (e.g. from March 2014 to March 2015) is then used as a measure of the **inflation rate**  $\pi$ , i.e.  $\pi_t = (P_{t+1} - P_t)/P_t$ . Note that there are various ways of selecting goods for calculating the index, also single goods can be weighted differently in the index, so that one has to be careful when analysing and comparing inflation rates.

<sup>11</sup>To give you a point of reference: as of February 2014, the ECB requires credit institutions in the Eurozone to hold 1% of deposits and the repayment amount of debt securities that are short term as minimum reserves with their respective central banks.

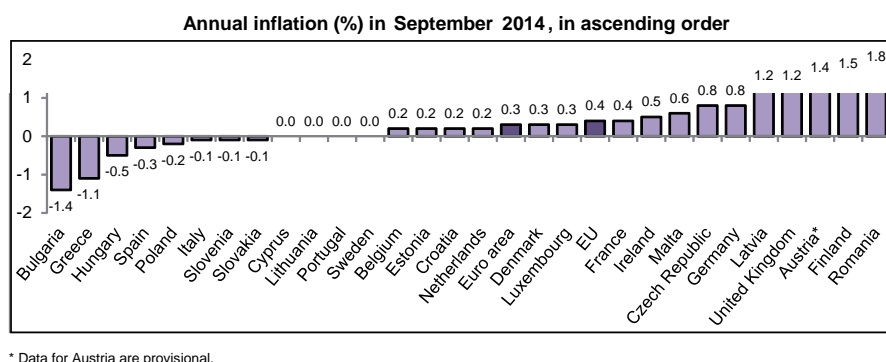
<sup>12</sup>For a more detailed description of the mentioned monetary terms or instruments, consult the ECB's website or wikipedia.

<sup>13</sup>Overnight deposits can generally be withdrawn from the account at any time, an example would be a current account with a bank (dt. *Girokonto*).

Inflation can be **expected** or **unexpected**. As for expected inflation, wages will typically rise in line with price levels. Due to inflation there is some incentive to spend money today rather than keeping it for later when prices will be higher, although this might be off-set by interest earned when depositing or investing the money. High expected inflation will make borrowing more expensive, as lenders will ask higher interest rates to compensate for the loss in purchasing power. For companies this should be mostly offset by increasing market prices (through expected inflation) and thus increasing revenues.

Unexpected inflation also increases the cost of borrowing, since the lender will price in the risk of rising inflation rates when defining the interest rate of a loan. This uncertainty makes borrowing for individuals and companies more costly, as it can not be certain of sufficiently high future prices to offset the increased borrowing costs. The higher interest rates will make lending more attractive in comparison to consuming, so that demand typically falls, also increased borrowing costs for corporates limits their potential to invest and grow. There is also some information cost linked to unexpected inflation. When observing rising prices in their sold goods, it is difficult for a company to decide if the increase comes from (a) increased demand or (b) an unexpected rise in inflation. Hence, it will be more hesitant in meeting higher demand through increased production.

Developed countries hence typically target (a) a low inflation rate to incentivise people to consume rather than save, and (b) a stable price environment in line with expectations to keep borrowing costs as low as possible. Even within the EU, inflation rates can differ considerably, as depicted in Abbildung 3.10.



**Abbildung 3.10:** 1-year inflation rates across the EU (Sep 2014).

**LI 75** **Central banks:** Explain the various functions of central banks generally.

When discussing the creation of money, we have already explained that central banks (CBs) issue currency. In addition to this function of

- Being the sole supplier of currency, the CB also takes on other responsibilities, such as:
- Implementation of monetary policy: the primary objective of most central banks is the **control of inflation**. Mostly an inflation rate of around 2% to 3%p.a. is seen as healthy for a developed economy's controlled growth. The CB manages inflation by trying to balance the demand for and supply of money to give price stability. This is done by implementing monetary policy measures such as providing additional loans to commercial banks to add to the banks' liquidity, or to lower or raise minimum reserve requirements (which will change the money multiplier and, hence, the money supply). Other objectives could include (a) raising employment levels,

(b) sustaining economic growth, or (c) ensuring exchange rate stability. For example, when the Swiss Franc (CHF) gained too much in value in 2011, the Swiss National Bank decided to support a minimum level of 1.20 CHF/EUR by buying euros with newly issued Swiss francs. This helped the Swiss economy: had the Swiss franc remained too strong, foreigners would have bought fewer Swiss goods, prices of imported goods would have been relatively cheap to Swiss goods leading to price drops and deflation. However, in January 2015 the Swiss National Bank decided to abandon the currency ceiling against the euro, given a further drop in value of the euro in the preceding weeks and concerns around downward-pressure on the euro from further quantitative easing measures considered by the ECB. The abandoning of the currency ceiling resulted in an immediate increase in value of the Swiss franc relative to the euro.

- Government's bank: CBs mostly manage their country's gold and foreign exchange reserves, as well as stock holdings. In some systems, the CBs are also allowed to lend to their government, however, mostly government raise money in the bond markets by issuing government bonds. The CB can then increase demand for government bonds by increasing lending against government bonds.
- The banks' bank: banks can borrow from and deposit with the CB. The CB can also step in as a *lender of last resort* as it can print money and lend it to banks with liquidity shortages.
- Regulation and supervision of payment systems: CBs often oversee local money transfers, they provide accounts to commercial banks to enable them to transfer between each other, and they enable international transactions in co-operation with other CBs.

Examples of central banks are the US Federal Reserve Bank, the European Central Bank, the Bank of England and the Bank of Japan.

**LI 76** **European Central Bank:** *Explain the responsibilities of the European Central Bank (ECB). What is the ECB's inflation target?*

The **European Central Bank** was established by the 1998 *Treaty of Amsterdam* as the central bank for the euro with the aim of ensuring price stability within the **Eurozone**. It hence coordinates and monitors the monetary policy for the Eurozone and it is headquartered in Frankfurt a.M. By the decentralization principle of the EU, the capital stock of ECB is owned by the national central banks (NCBs), which also carry out the monetary policy at an operational level. The ECB's only primary objective is to ensure 'a year-on-year increase in the **Harmonised Index of Consumer Prices (HICP) for the euro area of below 2%**', and price stability is to be 'maintained over the medium term' [42].

The ECB is a politically independent body, and is not allowed to seek or take instructions from EU institutions, EU member state governments or from any other body. As listed on [www.ecb.europa.eu](http://www.ecb.europa.eu), the ECB has, amongst others, the following *responsibilities*:

- Defining Eurosystem policies: this includes the definition how price stability and inflation are measured.
- Deciding, coordinating and monitoring monetary policy operations: instruction of the NCBs.
- Authorising the issuance of banknotes.

- Interventions on the foreign exchange (FX) market: by buying/selling foreign currencies.
- Operation of payment systems, the oversight of the Eurozone's financial market infrastructure: the payment system allowing money transfers within the banking system is called TARGET. The ECB also watched over the harmonisation of retail payment systems when overlooking the introduction of the SEPA (Single Euro Payments Area) system.
- Other tasks include international cooperations, reporting, monitoring financial risks, foreign reserve management and maintaining IT systems to allow financial operations.

The NCBs, as instructed and monitored by the ECB, execute monetary policy operations, manage their own and operationally manage the ECB's foreign reserves, jointly issue banknotes with the ECB, monitor the market and payment systems and collect statistics for reporting duties.

**LI 77** **Monetary policy:** Explain the ECB's main monetary policy instruments. How can the ECB influence market interest rates.

The ECB can provide liquidity to the market and influence interest rates. Mainly this is done through two types of instruments:

- **Open Market Operations (OMO):** the ECB provides short-term liquidity (one week, or three months) by purchasing assets (e.g. government bonds) in the form of Repo-transactions<sup>14</sup>. Within OMO, (a) the *Main Refinancing Operations* have a maturity of *one week* with access once a week, and (b) the *Long-term Refinancing Operations* have a maturity of *3 months* with access once a month.
- **Standing Facilities:** include (a) the Marginal Lending Facility, through which banks can borrow liquidity overnights at a fixed interest rate<sup>15</sup> and (b) the Deposit Facility through which banks can deposit funds overnights with their NCB at a prespecified interest rate that is the same across all Euro countries. These two facilities are similar to a current account (dt. Girokonto) retail customers would have with their commercial bank.

To attain funds through Open Market Operations, banks submit price/interest rate bids to the ECB at which they are willing to borrow at least €1 Mio during a **tender** (dt. *Auktion*) procedure.

- For **fixed-rate tenders**, the ECB announces the fixed-rate and allots an amount  $A$  to the tender and each party receives the proportion of its bid divided by the sum of all bids *times*  $A$  (i.e. for bid sizes  $a_i$  the  $i$ -th bidder receives  $a_i / (a_1 + \dots + a_n) \cdot A$ ).
- For **variable-rate tenders**, each bidder submits a bid on the loan amount  $a_i$  and an interest rate  $r_i$ . The ECB will then accept the offers with the highest interest rates until its allotment amount for the auction is used up. For the minimum accepted bid rate, the remaining allotment amount is split between the respective bidders in proportion to their bid sizes.<sup>16</sup>

<sup>14</sup>Repo stands for sale-and-repurchase agreement. The ECB hereby purchases assets at a discount to value, and the seller buys the assets back after a defined period at the full value. The discount can be translated into a borrowing interest rate. Essentially this is like a loan where the borrower provides a collateral (dt. *Sicherheit*), the difference lies in the fact that the lender (ECB) already owns the collateral asset, and does not have to claim it should the borrower go bankrupt.

<sup>15</sup>This is done through a repo or a collateralised loan.

<sup>16</sup>In technical terms, and as defined by the ECB, we order the bids  $(a_i, r_i)$  starting with the highest bid rate  $r_1$  to the lowest bid rate  $r_n$ , and  $a(r_s)$  shall be the total amount bid at the  $s$ -th highest bid rate. Bids at the



**71** Assume the ECB runs a tender to provide liquidity through its long-term refinancing operations, with an announced volume of €81.2 bn. Five banks bid amounts and interest rates  $(a_i, r_i)$  as follows (amounts in €bn): (20; 0.6%), (11; 0.6%), (12; 0.54%), (46; 0.71%) and (21; 0.62%). Imagine you support the ECB with the announcement of the outcome of the tender, allocating the amounts to each party under the assumption that the full volume is distributed. Also compute the **average bid rate**, the **minimum bid rate** and the **maximum bid rate** (all for accepted bids) of this tender offer.

**Lösung:** We rank  $r_4 > r_5 > r_1, r_2 > r_3$ . The amount  $a_4 = 46$  is fully allocated, and  $81.2 - 46 = 35.2$  remains available. Next  $a_5 = 21$  is also fully allocated, we still have  $35.2 - 21 = 14.2$ . The next best offer is at  $r_1 = r_2 = 0.6\%$ , however, we don't have sufficient funds remaining to fully satisfy both bids. We therefore split proportionally to their bid sizes (also: **pro rata**), and party 1 receives  $20/(20 + 11) \cdot 14.2 = 9.16$  and party 2 gets  $14.2 - 9.16 = 5.04$ . Party 3 receives nothing, as the bid rate was too low. The minimum bid rate (accepted) is 0.6%, the maximum bid rate is 0.71%, and the average bid rate is

$$r_{\text{avg}} = \frac{46 \cdot 0.71\% + 21 \cdot 0.62\% + 14.2 \cdot 0.6\%}{81.2} = 0.67\%.$$

Party 4 seems rather eager to obtain liquidity, since it went into the auction way above the other bidders, possibly to increase its chance to obtain funds. Since the tender was through the Long-Term Refinancing Operations, the liquidity is provided for 3 months.

The ECB can influence market rates by lending at certain fixed rates or by accepting a certain minimum bid rate. Experience shows that the rates in the inter-bank market<sup>17</sup> are strongly influenced by the ECB rates, and often deviate very little from those. This is because borrowing from the ECB is an alternative to borrowing from other banks. Low financing rates for banks often imply generally low interest rates in the market, since the banks mostly pass on the cheap lending rates to the customers due to a high level of competition. The borrowers provide collateral (dt. *Sicherheiten*) to the ECB in return for the loan, also ECB rates can vary greatly over time (see Abb. 3.11<sup>18</sup>). For more information of the ECB's monetary policy instruments, check ECB [6].

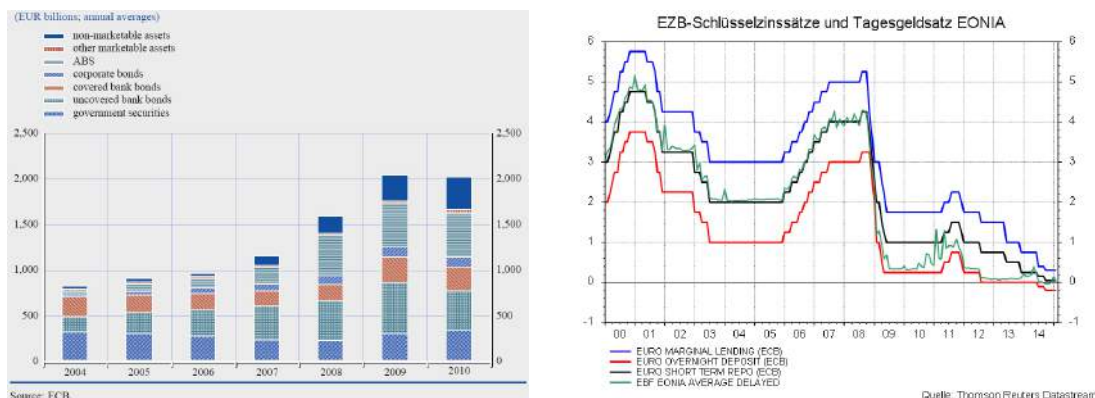
**LI 78** **Monetary policy and economic growth:** Explain the theoretical link between (a) a central bank's short-term manipulation of short-term interest rates and (b) economic activity.

Recall that the ECB's facilities were only short-term (i.e. typically up to three months; non-standard facility could also be longer such as 12-months such as during the 2007-2010 credit crisis), meaning that initially the ECB can only influence interest rates for short-term lending. The effect is typically observed to be the following (assume that the ECB rates are below the rates currently offered for lending between banks):

$m - 1$  highest bid amounts are fully paid if  $a(r_1) + \dots + a(r_{m-1}) \leq A$ . Suppose  $a(r_m)$  is only partially paid, since  $a(r_1) + \dots + a(r_m) > A$ . Each party bidding  $r_m$  is allocated the proportion of their bid size within this bidder group times  $A - a(r_1) - \dots - a(r_{m-1})$

<sup>17</sup>In the interbank market, the so-called **London Interbank Offered Rate** (LIBOR) or **Euro Interbank Offered Rate** (EURIBOR) are reported. These rates are some average of the variable market interest rate at which certain large banks can borrow from each other e.g. over 3 months for the LIBOR<sub>3m</sub>.

<sup>18</sup>You should focus on the listed instruments and rates you know, however, note that **ABS** means 'asset backed securities', a **covered bank bond** is a bond issued by a bank that additionally receives securities e.g. in the form of bonds or senior loan tranches, **EONIA** stands for 'Euro overnight index average' and reflects the average rate at which banks can borrow money from another bank until the following business day.



**Abbildung 3.11:** Collaterals provided in return for liquidity from the ECB (left) and various historical ECB key rates (2000-2015), right), source: ECB [7], Thomson Reuters.

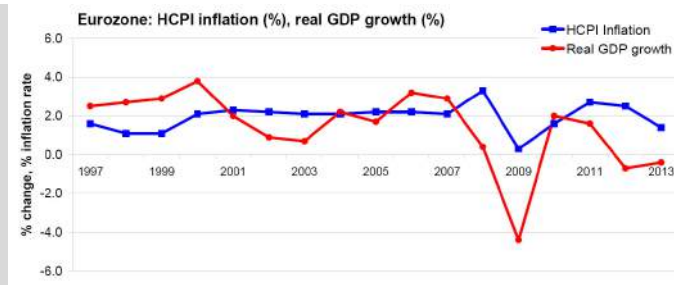
- ECB increases repo buying of securities (i.e. increases its lending volume).
- Banks lower the interbank interest rates due to this increase in liquidity.
- Short-term rates across the economy decrease due to the increased competition between banks to use the additional liquidity to lend to their customers (increase in credit supply).
- Medium and long-term interest rates also decrease.
- Businesses can borrow at cheaper rates to invest in property, plant and equipment, which supports growth.
- Consumers receive lower interest rates on their savings: they increasingly consume rather than save.
- Given the lower euro interest rates, also non-euro domiciled companies will increasingly borrow in euro, and transfer the money to their countries which will decrease the value of the euro. A weaker euro makes local products cheaper in non-euro countries, and hence the demand will increase.
- The increase in demand increases inflation. The local economy produces more, hence, unemployment falls, and real GDP grows.

The above is called **transmission mechanism**. Further lowering interest rates by the ECB makes the explained effects stronger. On the other hand, during times of strong economic growth, the ECB typically aims to increase interest rates (and to cut the volume lent to the banks) (1) to keep inflation under control (as of 2015: below 2%), (2) to keep growth at a 'healthy' pace and (3) to build up an interest-rate buffer so it can decrease rates later when growth slows down.



72 Briefly explain the history of actions by the ECB since 1998.

**Lösung:** We first plot the development of the Eurozone (a) HCPI inflation rate and (b) real GDP growth over the considered years.



On 1st January 1999 the ECB assumed the responsibility for monetary policy in the Eurozone. Then price stability had been established, the inflation rate was at around 1% and the ECB set the initial MRO rate at 3%. Rapid economic growth in combination with a weakening Euro introduced inflationary pressures, so that the ECB decided to stepwise raise the MRO rate to 4.75% in October 2000. The burst of the dotcom bubble in March 2000 and the 9/11 attacks in 2001 marked a time of uncertainty, with inflation slowing and volatile stock markets. This led to a decrease in the MRO rate down to 2% by mid 2003. Not much changed between 2003 and 2005, so that the MRO rate remained unchanged over this time period. Driven by economic growth and rapid expansion of credit/money in the Eurozone, the ECB reacted to an upward pressure on prices (rise in inflation) by lifting the MRO rate up to 4.25% in July 2008. The start of the credit crunch in 2007/08 let liquidity provided by banks dry up, so that the ECB stepped in by lowering interest rates to as low as 1% (over a period of only 7 months) by May 2009. To ensure price stability the ECB also implemented a range of non-standard measures, such as longer-term facilities (up to 12 months) and significantly increased volumes of liquidity (through repo tenders). Between 2009 and 2014, the MRO rate has remained very low due to incentivise economic growth (which has remained negative in 2012 and 2013 in real terms).

**LI 79** **Fiscal policy:** Explain the instruments of fiscal policy, and the pros and cons linked to their use. Name limits to fiscal policy. What are the Maastricht criteria within the Euro zone?

Governments can also influence economic activity. This can be done by taxation and deciding on spending instruments.

- Taxation: governments can demand (a) **direct taxes** on income and wealth. This can include income tax, social services tax, wealth tax, gift and inheritance tax, corporate tax and capital gains tax. (b) **Indirect taxes** are charged on the sale of goods and services. Examples include value-added tax (VAT; dt. *Mehrwertsteuer*) and excise taxes (dt. *Luxussteuern*, e.g. on alcohol, cigarettes, luxury items). Taxation will reduce income or wealth, or increase the prices of goods. Increasing (or: decreasing) taxation can be used to decrease (or: increase) the demand for (certain) goods.
- Spending: governments can decide on (a) transfer payments (pensions, unemployment benefits) to redistribute wealth, (b) current spendings (e.g. national defence, schooling, research, public health services) on an ongoing basis and (c) capital spendings (e.g. infrastructure, schools, roads) on a discretionary basis. Spending instruments can be used to preserve minimum living standards across the population, to pay for goods/services that are consumed by all residents and to momentarily manage economic growth and employment rates.

Note that when taxing certain individuals (e.g. a wealthy part of the population) and redistributing

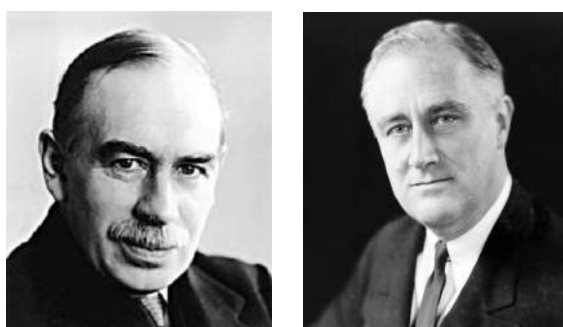


funds through *transfer payments* to other population groups (e.g. unemployed, low-income families), consumption behaviour in this economy can potentially change significantly. For example, while one group would have saved the money, the receiver group might consume it directly, resulting in an increase in demand for goods and services.

Regarding benefits of fiscal policy measures, (a) they can help to address social issues (alcohol/tobacco consumption, unemployment, etc.) very quickly, (b) they can help to increase government income very quickly to balance the budget if this is desired, (c) a target lowering of taxes can increase a country's attractiveness to individuals and companies. On the downside, (a) direct taxes and transfer payments require time to implement so that any effects are delayed and (b) capital spending also typically affects the economy with a delay and are more suitable to bridge longer economic troughs (e.g. when initializing the construction of a motorway).

**LI 80** **Case: US Fiscal Policy:** *Case study: explain the US fiscal policy since the 1930s. Did the control of government spendings and taxation always bring the desired economic effects?*

Before the 1930s, classical economics believed that reliance on market forces was the best way to achieve long-term economic growth and prosperity. Fiscal policy instruments were hence rarely used to influence economic activity until the 1930s. The Great Depression, however, brought unemployment levels from about 4% to as high as 25% by 1933 (see Abbildung 3.13). The market forces seemed to be unable to change prices in a way that the economy would come anywhere close to its potential output and use of resources. This led John Maynard Keynes, an economist of Cambridge university, to argue that during severe downturns markets might not be self-correcting in the short-run, as price and wage levels would not react strongly enough and even low interest rates were not strong enough to be an incentive for firms to restart investing. Keynes argued further in his 1936 publication *The General Theory of Employment, Interest and Money*, that governments should step in and increase its current spendings and investments (so-called 'deficit spending') to encourage a rise in employment and demand across the economy.

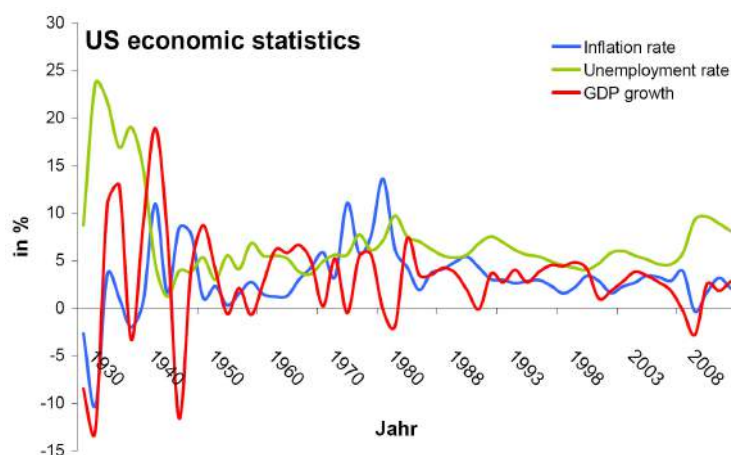


**Abbildung 3.12:** John Maynard Keynes (economist, 1883-1946, left) and Franklin D. Roosevelt (32nd US President, 1882-1945, right).

Fiscal policy hence began to see its role more in ensuring economic stability than in producing balanced households as previously. F.D.Roosevelt was elected as President of the US in 1932 amidst the Great Depression and - allegedly partly influenced by Keynes' thinking - immediately started to implement measures to reignite economic growth. His New Deal programme aimed at bringing relief, recovery and reform (the 'three Rs'). His administration incorporated social welfare/insurance measures (Social Security Act 1935), the protection of bank savings (Glass-Steagall Act 1932), employment measures

such as government-paid environmental conservation projects or infrastructure projects, the bailing-out of local governments, the provision of unemployment benefits. It is disputed if all those measures actually encouraged sustainable growth as a real economic only set in with the beginning of WWII and a surge in weapons and fabric production. After WWII, US real GDP declined during 7 years from 1948, however, the various stabilizing measures as adopted, such as unemployment benefits, deficit spending and progressive taxation, diminished the effects on consumption which only fell in two out of the seven years.

In the 1960s, presidents J.F. Kennedy and L.B. Johnson kept running a deficit spending strategy to at first lower unemployment and later to keep an already expanding economy expanding further, accompanied by tax cuts. The 1970s, however, saw high inflation accompanied by high unemployment. This phenomenon is called **stagflation**, and was induced by sharp increases in OPEC oil prices, failed crops around the world and other supply shortages. Conventional fiscal policy would not work well, as an increase in demand would fuel inflation while a decrease in demand would bring up unemployment. Under president R. Reagan it was tried in 1981 to tackle the lack of economic growth through a major cut of income taxes, on average by more than 20%. Consumers would save more as they now had more money available, also people would be willing to work at lower wages as the net income might still be higher due to the tax cuts. The measures resulted in a lowering of unemployment and real GDP per capita growth. The government had hoped to offset the loss from income tax through other taxes from a grown economy - which, however, did not fully work out. Growing national deficits and debt has ever since limited the possibility to implement strong fiscal measures. For example, Clinton's proposal to implement a stimulus package to support the recovery of the early 1990s was blocked by his opposition who declined a widening fiscal deficit. This is also evident by recent problems whenever the legal public debt ceiling in the US (as of 2013: US\$ 16.7 trillion) is reached, as an increase in public debt requires approval by the Congress.



**Abbildung 3.13:** US GDP growth, inflation rates and unemployment rates (sources: useconomy.about.com, info-please.com.)

For a more detailed account of the history of fiscal policy in the US, consult McEachern [29], pp 258.

**LI 81** **Limits to Fiscal Policy:** *What limits to expansionary fiscal policy measures can exist? Comment on the Stability and Growth Pact of the EU.*

We have discussed that in order to encourage consumption of goods and services and hence economic

growth, countries can (a) lower taxes, (b) redistribute money through transfer payments or (c) temporarily increase government spendings to raise employment, build infrastructure or give out money to low-wealth parts of the population. Countries typically cover such costs from (i) tax or other income or (ii) by raising money in the form of government bonds. Typical investors of government bonds are banks, insurance companies, (pension) funds or individuals.

Recall that during economic downturns the government typically receives *less tax* from businesses and individuals in any case. Extra fiscal spendings to encourage economic growth will hence typically lead to a household deficit in that year. This will then increase government debt, as governments have to borrow the part of the spendings that exceeds their income in that year. (A) Increasing the government debt can lead to higher borrowing costs, as the capital markets might perceive the government's promise of repaying its debt as riskier. This will cause extra interest costs to the government in the following periods. In the case of Greece in 2010, the problem of having to borrow more and more to cover the higher and higher interest costs, paired with falling income from taxes due to an economic recession within its economy, led to a debt crisis. Investors would no longer lend to Greece, and Greece had to restructure its bonds. (B) Restrictions to increased debt can also exist by law or contract. We have mentioned the debt ceiling in the US. Similarly, the EU countries (both Euro and non-Euro countries) have agreed on the **Stability and Growth Pact** (SGP) which came into force in 1998/1999. Under this pact, the EMU member states agreed to (a) keep their budget deficits below 3% of GDP and (b) maintain a public debt to GDP ratio of no higher than 60%. Especially after the 2010 European sovereign debt crisis, almost all member states have violated at least one criterion, the SGP was reformed, e.g. by defining how penalties were imposed for not obeying the criteria. Having agreed on the stability criteria as above might hence limit the member countries' ability to implement expansionary fiscal measures. For a reference, check Abbildung 3.14 how the debt to GDP level has developed between 2007 and 2013.

Also recall from the previous Lerninhalt that extraordinary situations, such as the stagflation in the 1970s, might not be immediately solvable by just increasing government spendings or adjusting taxation slightly. Likewise it will be a challenge for many developed economies to decrease their debt levels and, hence, their dependence on the capital markets over the coming years, without finding organic economic growth opportunities. In this context, note that inflation lowers the value of debt relative to real assets.

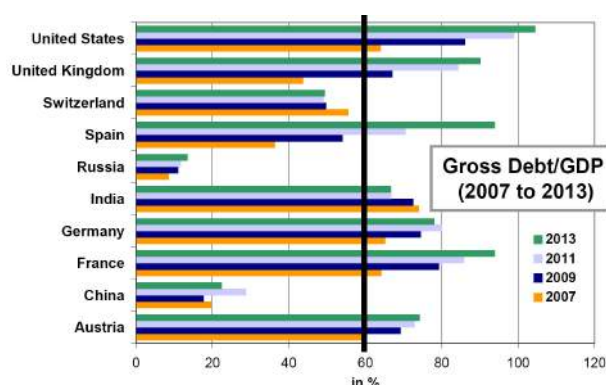


Abbildung 3.14: Gross Debt/GDP ratios for the years 2007, 2009, 2011 and 2013. (sources: www.imf.org.)

### 3.4 Literature and References

There is a large scope of literature available on micro- and macroeconomics. Standard US-style textbooks offer rich background reading and many exercises illustrating the theory. Examples of such books are Pindyck/Rubinfeld [36], Krugman/Wells [27], Mankiw [28] and Abel et al. [1]. If you prefer to read in German, Gischer et al. [23] gives a well-structured overview of monetary, credit and banking systems, and some of the mentioned textbooks have been translated into German. Economics is also included in the curriculum of the CFA exam series, and a good and concise overview of important economic concepts is given in Level 1's Book 2, cf. [17]. The Schweser book series offers a well-structured summary of this. Schaum's notes on Economics [41] are concise and well suited for self-study.

Finally, the ECB offers an abundance of documentation and educational material on the monetary system of the Eurozone. You might wish to visit its online platform [www.ecb.europa.eu](http://www.ecb.europa.eu) to find publications such as [8].

### 3.5 Chapter Summary

We now summarize the main concepts and ideas as discussed and illustrated in this chapter:

- ✓ *Demand and supply functions*: model demand for and supply of goods and services in a competitive market. What are typical shapes of demand/supply functions?
- ✓ *Stable equilibrium*: how can supply and demand dynamics lead to an equilibrium state?
- ✓ *Consumer and producer surplus*: single market participants profit from market competition.
- ✓ *Price floors or caps*: what happens when governments intervene in a competitive market by restricting price levels?
- ✓ *Elasticities of demand*: measure the reaction of demand to a change in a product's price, income or the price of other goods.
- ✓ *Supply-side levels of competition*: monopoly, oligopoly, monopolistic vs. open competition. How would a monopolist set the market price?
- ✓ *Herfindahl-Hirschman Index*: measure market share concentrations (and implied pricing/market powers of single market participants).
- ✓ *Inflation*: define expected and unexpected inflation. Does inflation support economic growth?
- ✓ *Unemployment*: what different kinds of unemployment would you distinguish? What can hidden unemployment comprise?
- ✓ *GDP*: expenditure approach, define nominal, real and PPP GDP. What is a recession (technically)?
- ✓ *Economic growth*: definition, sources, measurement.

- ✓ *Economic cycles*: explain the dynamics leading to the business/economic cycle. How is this connected to employment levels and inflation/deflation? What are leading and lagging indicators?
- ✓ *Monetary and fiscal policy*: who implements what, distinctions.
- ✓ *Money*: how is money created by central and commercial banks? What is the money multiplier? What are the money measures M1, M2 and M3?
- ✓ *Central banks*: functions and examples.
- ✓ *ECB*: role and tasks. How are the national central banks still involved?
- ✓ *Monetary policy*: what instruments does the ECB use? How does monetary policy affect economic activity?
- ✓ *Fiscal policy*: overview and instruments. What could impose limits to fiscal measures? What is the SGP in the EU?
- ✓ *US Fiscal policy*: give a historical overview of fiscal measures implemented in the US. What is stagflation?





# Kapitel 4

## Ausgewählte Finanz- bzw. Versicherungsprodukte

### Inhalte und Lernziele

In diesem Kapitel werden Bank- bzw. Kapitalmarktprodukte auf der einen Seite und Versicherungsprodukte auf der anderen Seite behandelt. Im Finanzbereich treffen wir dabei die Einteilung (a) Einlagen- bzw. Kreditgeschäft, (b) Kapitalmarktprodukte (Anleihen/Aktien) und (c) Derivate. Im Versicherungsbereich widmen wir uns ausgewählten Produkten aus den Geschäftsfeldern (a) Schaden- und Unfallversicherung und (b) Leben- bzw. Krankenversicherung. Dabei geben wir einen Überblick, mit welchen Produkten Banken und Versicherungen typischerweise befasst sind. Spezifikationen, Risiken, Einsatzbereiche, Herausforderungen und sehr einfache Ideen zur Bewertung dieser Produkte spielen ebenso eine zentrale Rolle in diesem Kapitel.

### 4.1 Ausgewählte Finanzprodukte

#### 4.1.1 Klassische Bankprodukte: Einlagen und Kredite

**LI 82** **Depotgeschäft:** *Erkläre kurz das Depot- bzw. Einlagengeschäft einer Bank. Welche Arten von Einlagen gibt es? Was genau ist die gesetzliche Einlagensicherung?*

Einlagen sind Verbindlichkeiten der Bank gegenüber ihren Kundinnen, die ihre Einlagen zurückverlangen können. Deshalb sind Kundeneinlagen auf der Verbindlichkeitsseite, also der Passivseite, der Bankbilanz zu finden. Das Einlagengeschäft der Bank wird deshalb auch oft **Passivgeschäft** genannt.

Wir unterscheiden im Wesentlichen:

- **Spareinlagen:** sind Geldeinlagen bei Kreditinstituten, die nicht dem Zahlungsverkehr, sondern der Geldanlage dienen. Spareinlagen werden gegen Ausfolgung von sogenannten **Sparerkunden** ('Sparbuch') entgegengenommen. Zur Verfügung über Spareinlagen, die geringer als €15.000 sind und nicht auf den Namen des Kunden lauten, ist das Buch vorzulegen und das Lösungswort zu nennen. Spareinlagen können täglich fällig sein, oder eine definierte Laufzeit haben. Das Spareinlagengeschäft ist in Österreich im Wesentlichen in §§ 31-32 des Bankwesengesetzes (BWG) geregelt.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Der Text der aktuellen Version des Bankwesengesetzes, verknüpft mit Verweisen zu relevanten OGH Urteilen, kann

- Sonstige Verbindlichkeiten: umfassen beispielsweise (a) **Sichteinlagen** (als Privat-, Kommerz- oder Treuhandkonten) sind täglich fällige Einlagen ohne wesentliche Kündigungsfrist, die vor allem dem bargeldlosen Zahlungsverkehr dienen (z.B. Giro- oder Scheckkonten), und (b) **Termingelder** haben eine bestimmte Laufzeit und einen fixen Zinssatz, wobei eine Einmaleinlage zu Beginn der Laufzeit vorgenommen wird, und eine Einmalverfügung zum Ende.

In Abbildung 4.1 sehen wir am Beispiel der Bankbilanz 2013 der Unicredit Bank Austria AG, dass Einlagen von Kreditinstituten und Kunden (unterteilt in Spareinlagen und sonstige Verbindlichkeiten) einen wesentlichen Teil der Passivseite der Bankbilanz ausmachen. Konkret machen die beiden Positionen zusammen 62,5% der Bilanzsumme im gezeigten Beispiel aus.

Passiva	(Tsd €)			
	31.12.2013	31.12.2012	+/- GEGENÜBER 31.12.2012	
			IN 1.000 €	IN %
<b>1. Verbindlichkeiten gegenüber Kreditinstituten</b>	<b>26.368.663</b>	<b>29.475.481</b>	<b>-3.106.818</b>	<b>-10,5</b>
a) täglich fällig	4.126.103	5.320.183	-1.194.080	-22,4
b) mit vereinbarter Laufzeit oder Kündigungsfrist	22.242.560	24.155.298	-1.912.738	-7,9
<b>2. Verbindlichkeiten gegenüber Kunden</b>	<b>48.747.181</b>	<b>49.050.742</b>	<b>-303.561</b>	<b>-0,6</b>
a) Spareinlagen	16.444.094	17.090.853	-646.759	-3,8
aa) täglich fällig	5.128.616	4.788.473	340.143	7,1
bb) mit vereinbarter Laufzeit oder Kündigungsfrist	11.315.478	12.302.380	-986.902	-8,0
b) sonstige Verbindlichkeiten	32.303.067	31.959.889	343.198	1,1
aa) täglich fällig	23.772.705	24.151.562	-378.857	-1,6
bb) mit vereinbarter Laufzeit oder Kündigungsfrist	8.530.362	7.808.327	722.055	9,2
<b>3. Verbriefte Verbindlichkeiten</b>	<b>23.509.695</b>	<b>22.512.193</b>	<b>997.502</b>	<b>4,4</b>
a) begebene Schuldverschreibungen	19.591.365	18.404.141	1.187.224	6,5
b) andere verbrieft Verbindlichkeiten	3.918.330	4.108.052	-189.722	-4,6
<b>4. Sonstige Verbindlichkeiten</b>	<b>1.369.317</b>	<b>1.732.897</b>	<b>-363.580</b>	<b>-21,0</b>
<b>5. Rechnungsabgrenzungsposten</b>	<b>63.503</b>	<b>119.765</b>	<b>-56.262</b>	<b>-47,0</b>
<b>6. Rückstellungen</b>	<b>5.026.690</b>	<b>4.451.167</b>	<b>575.523</b>	<b>12,9</b>
a) Rückstellungen für Abfertigungen	288.569	273.962	14.607	5,3
b) Rückstellungen für Pensionen	3.179.180	2.884.601	294.579	10,2
c) Steuerrückstellungen	214	214	-	-
d) sonstige	1.558.727	1.292.390	266.337	20,6
<b>6.A Fonds für allgemeine Bankrisiken</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>
<b>7. Nachrangige Verbindlichkeiten</b>	<b>2.425.660</b>	<b>2.680.672</b>	<b>-265.012</b>	<b>-9,8</b>
<b>8. Ergänzungskapital</b>	<b>446.731</b>	<b>446.861</b>	<b>-130</b>	<b>-0,0</b>
<b>9. Gezeichnetes Kapital</b>	<b>1.681.034</b>	<b>1.681.034</b>	<b>-</b>	<b>-</b>
<b>10. Kapitalrücklagen</b>	<b>8.280.918</b>	<b>9.332.128</b>	<b>-1.051.210</b>	<b>-11,3</b>
a) gebundene	7.913.947	7.913.947	-	-
b) nicht gebundene	366.971	1.418.181	-1.051.210	-74,1
<b>11. Gewinnrücklagen</b>	<b>-</b>	<b>579.175</b>	<b>-579.175</b>	<b>-100,0</b>
a) für eigene Aktien und Anteile an einer herrschenden Gesellschaft	-	-	-	-
b) gesetzliche Rücklage	-	14.535	-14.535	-100,0
c) satzungsmäßige Rücklagen	-	-	-	-
d) andere Rücklagen	-	564.640	-564.640	-100,0
<b>12. Haftrücklage gemäß § 23 Abs 6 BWG</b>	<b>2.129.748</b>	<b>2.129.748</b>	<b>-</b>	<b>-</b>
<b>13. Bilanzgewinn/Bilanzverlust</b>	<b>-</b>	<b>2.514</b>	<b>-2.514</b>	<b>-100,0</b>
<b>14. Unversteuerte Rücklagen</b>	<b>77.377</b>	<b>77.377</b>	<b>-</b>	<b>-</b>
a) Bewertungsreserve auf Grund von Sonderabschreibungen	77.377	77.377	-	-
b) sonstige unversteuerte Rücklagen	-	-	-	-
aa) Investitionsrücklage gemäß § 9 EStG 1988	-	-	-	-
bb) Investitionsfreibetrag gemäß § 10 EStG 1988	-	-	-	-
cc) Mietzinsrücklage gemäß § 11 EStG 1988	-	-	-	-
dd) Übertragungsrücklage gemäß § 12 EStG 1988	-	-	-	-
<b>SUMME DER PASSIVA</b>	<b>120.126.517</b>	<b>124.281.754</b>	<b>-4.155.237</b>	<b>-3,3</b>

**Abbildung 4.1:** Passivseite der Bilanz der Unicredit Bank Austria AG (Jahresbericht 2013, Quelle: [www.bankaustria.at](http://www.bankaustria.at)).

Die **Einlagensicherung** schützt in Österreich grundsätzlich Einlagen auf verzinsten und unverzinsten Konten (z.B. Girokonten, Sparkonten und Bausparkonten, grundsätzlich in EUR oder EU Fremdwährung). Damit sind Gehalts- bzw. Pensionskonten, sonstige Girokonten, Festgelder, Kapitalsparbücher auf der Website [www.jusline.at](http://www.jusline.at) abgerufen werden.



und täglich fällige Sparbücher gesichert. Seit Jänner 2010 sieht die Sicherung einen Höchstbetrag von €100.000 pro Bank und natürlicher Person vor; im Fall nicht natürlicher Personen (z.B. Personengesellschaften und kleinen Kapitalgesellschaften) wird der Sicherungsbetrag auf €50.000 reduziert.<sup>2</sup> In Österreich wird die Einlagensicherung von insgesamt fünf Sicherungseinrichtungen (getrennt nach Sektoren: Banken, Raiffeisenbanken, Sparkassen, Volksbanken, Hypothekenbanken) durchgeführt. Im Bedarfsfall fordert die Sicherungseinrichtung in der ersten Linie von den verbleibenden Mitgliedsinstituten Beiträge, um die gesicherten Einlagen ausbezahlen zu können. Die Einlagensicherung ist in Österreich in §93 des Bankwesengesetzes geregelt.

**LI 83** **Girokonto:** *Erkläre den Begriff Girokonto genauer. Was ist ein Girokonto? Wer darf es eröffnen?*

Das **Girokonto** ist ein *legitimiertes Konto* für Verbraucher (im Sinn des §1 Abs. 1 Z2 Konsumentenschutzgesetz) und Nichtverbraucher und dient als *Drehscheibe des Zahlungsverkehrs*. So ermöglicht es bargeldlosen Zahlungsverkehr, Bargeldbeschaffung, die Zahlung über Schecks/Wechsel, Internetbanking und die Abrechnung von Kreditkartenzahlungen. Der **Kontoauszug** gibt eine Übersicht aller Buchungen einer Periode und die Bank muss so gem. §34 BWG dem Kunden mindestens einmal pro Vierteljahr den Kontostand zur Kenntnis bringen. Die *Verfügung* über das verfügbare Guthaben eines Girokontos erfolgt mittels (a) Unterschrift oder (b) die Eingabe eines Codes.

Ein Girokonto darf von den folgenden *Kunden* eröffnet werden:

- **Natürliche Personen** ab dem vollendeten 14. Lebensjahr (wobei bei Jugendlichen, also Personen, die das 18. Lebensjahr noch nicht vollendet haben, der Bank eine besondere Sorgfaltspflicht auferlegt wird; z.B. Begrenzung der wöchentlichen Behebungen am Geldautomat auf €400; vgl. §36 BWG).
- **Juristische Personen** des Privatrechts (GmbH, AG, eingetragene Vereine, Stiftung bürgerlichen Rechts) und des öffentlichen Rechts (Gemeinden, Länder, Bund, Anstalten).
- **Eingetragene Firmen**, die keine juristische Person sind (**Vollkaufleute**, Personengesellschaften).

**LI 84** **Gebühren/Spesen Girokonto:** *Welche Arten von Zinssätzen gibt es im Einlagengeschäft? Welche Kosten bzw. Gebühren/Spesen können für den Kunden bei einem Girokonto anfallen?*

Das Kundengeschäft der Banken kennt grundsätzlich (a) **Habenzinsen** auf Guthaben, (b) **Sollzinsen** auf negative Salden (ursprünglich von Girokonten, heute wird der Begriff oft allgemein für Kreditzinsen verwendet). Für Girokonten sind beide Zinssätze meist variabel und ändern sich über die Zeit. Girokonten weisen meist einen **Überziehungsrahmen** auf. Wird der Überziehungsrahmen durch Verfügungen überschritten, so fallen meist zusätzlich **Verzugszinsen** (oder: Überziehungszinsen) an. Die Soll- bzw. Überziehungszinsen liegen meist wesentlich über den Habenzinsen, so kann es sich bei regelmäßigen Überziehungen empfehlen, einen separaten **Dispositionskredit** (auch: Kreditlinie) mit der Bank zu vereinbaren.

Die Zahlungsdienstrichtlinie 2007/64/EG wird in Österreich seit 2009 durch das Zahlungsdienstgesetz (ZaDiG) durchgesetzt. Nach diesem ist eine automatische Anpassung von Verträgen nur mehr in

<sup>2</sup>Detaillierte Informationen zur österreichischen Einlagensicherung sind unter [www.einlagensicherung.at](http://www.einlagensicherung.at) zu finden (Stand: 05/2014).

Bezug auf Zins- und Währungsänderungen zulässig. Andere Gebührenänderungen müssen dem Verbraucher schriftlich mitgeteilt werden, wobei in solch einem Fall dem Verbraucher ein gebührenfreies und fristloses Kündigungsrecht zusteht. Gebühren umfassen (a) Kontoführungsprovisionen (für die Einrichtung von Daueraufträgen, Überweisungen etc.), (b) Umsatzprovisionen (bei Kommerzkunden wird manchmal ein Promille-Satz auf den Umsatz der umsatzstärkeren Seite (Soll oder Haben) in Rechnung gestellt) oder (c) Bereitstellungsprovisionen (bei der Bereitstellung von Kontorahmen, auf den Rahmen, den Soll-Betrag, oder Rahmen *minus* Soll-Betrag).

**LI 85** **Kredit/Darlehen:** *Erkläre die wesentlichen Definitionspunkte eines Kreditvertrags.*

Die rechtliche Basis für das Kreditgeschäft ist in Österreich im Allgemein bürgerlichen Gesetzbuch (ABGB), im Bankwesengesetz (BWG), in den Mindeststandards für das Kreditgeschäft (MSK), im Verbraucherkreditgesetz (VKrG) und durch Verordnungen der Finanzmarktaufsicht abgesteckt. Neben der allgemeinen Regelung von Verträgen im ABGB, müssen speziell in Kreditverträgen (im Sinne des §988 ABGB) die folgenden Mindestangaben enthalten sein:<sup>3</sup>

- die Identität der Vertragsparteien,
- die Art des Kredits,
- der Gesamtkreditbetrag,
- der Sollzinssatz (und der Verzugszinssatz bei Zahlungsverzügen),
- der effektive Zinssatz,
- die Laufzeit bzw. Fälligkeit des Kredits (sowie Rückzahlungsmodalitäten z.B. in Form eines Tilgungsplans),
- die Gesamtbelastung (d.h. die ausbezahlte Kreditsumme und die gesamten Kosten),
- etwaige verlangte Sicherheiten oder Versicherungen.

Diese und weitere Informationen müssen dem Verbraucher vom potenziellen Kreditgeber rechtzeitig vor Vertragsabschluss zur Verfügung gestellt werden, sodass dem Verbraucher ein Vergleich verschiedener Kreditangebote ermöglicht wird. Eine Vorlage für solch ein Informationsformular ist im Anhang III ('Europäische Standardinformationen für Überziehungsmöglichkeiten nach dem Verbraucherkreditgesetz') des VKrG zu finden.

**LI 86** **Verzinsung, Zinsberechnungsmethoden:** *Erkläre, wie die Verzinsung von Einlagen und Krediten berechnet wird. Erkläre die Zinsberechnungsmethoden ACT/365, ACT/360 und 30/360.*

Zusätzlich zur Höhe des Zinssatzes kann auch die Wahl der **Zinsberechnungsmethode** (engl. *Day-Count Convention*) den tatsächlichen Betrag der Zinszahlung beeinflussen. Nehmen wir an, dass ein Kredit mit einer Kreditsumme von €1.000.000 und einem nominalen Zinssatz von 8% quartalsmäßig nachschüssig verzinst wird. Die Zinszahlungen werden immer am 15. der Monate März, Juni, September und Dezember angewiesen. Die Zinsperioden eines Zinsjahres sind somit 15. März bis 15. Juni, 15. Juni bis 15. September, 15. September bis 15. Dezember und 15. Dezember bis 15. März. Damit Tage nicht doppelt gezählt werden, kann man z.B. der Konvention folgen, dass der erste Anlagetag

<sup>3</sup>Vgl. §9 Verbraucherkreditgesetz.

nicht verzinst wird, während der letzte Anlagetag verzinst wird. Im Folgenden stellen wir unterschiedliche Zinsberechnungsmethoden vor, und illustrieren die Methoden sofort am obigen Beispiel für die Periode März bis Juni.

- **ACT/360:** ACT steht für 'Actual' und indiziert, dass man tatsächliche Tage zählt; die Anzahl wird dann durch 360 dividiert. In unserem Beispiel ergibt sich für diese Methode eine Zinszahlung von  $(16 + 30 + 31 + 15)/360 \cdot 0,08 \cdot 1.000.000 = €20.444,44$ . Diese Methode heißt auch **Eurozinsmethode**.
- **30/360:** jedes Monat, egal wieviele Tage es wirklich hat, wird mit 30 Tagen gezählt. In unserem Beispiel ergibt sich:  $(15 + 30 + 30 + 15)/360 \cdot 0,08 \cdot 1.000.000 = 20.000$ . Diese Methode heißt auch **deutsche kaufmännische Zinsmethode**.
- **ACT/365:** funktioniert wie ACT/360, nur dass durch 365 (auch bei Schaltjahren) anstatt durch 360 dividiert wird. Für unser Beispiel ergibt sich  $(16 + 30 + 31 + 15)/365 \cdot 0,08 \cdot 1.000.000 = 20.164,38$ . Diese Zinsberechnungsmethode wird **englische Zinsmethode genannt**.

In der Praxis sind für verschiedene Produktklassen und Währungen bzw. Länder entsprechende Zinsberechnungsmethoden als Marktstandard etabliert. Auch wenn das Zahlenbeispiel gezeigt hat, dass die zu zahlenden Zinsbeträge zwischen den einzelnen Zinsberechnungsmethoden nicht wesentlich variieren, so fallen im obigen Beispiel bei ACT/360 doch um mehr als 2% mehr Zinsen als bei 30/360 an.



**73** Ein Kredit in der Höhe von €500.000 wird zu nominell 6% p.a. verzinst. Die Zinszahlung erfolgt halbjährlich, jeweils zum 15. Dezember und zum 15. Juni. Berechne die Zinszahlung für die Periode 15. Dezember bis 15. Juni, wenn der Februar nicht in einem Schaltjahr liegt, nach der (a) ACT/360 und (b) der 30/360 Methode.

**Lösung:** Für die ACT/360 Methode ergibt sich

$$\frac{16 + 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 15}{360} \cdot 0,06 \cdot 500.000 = 15.166,67,$$

während man nach der 30/360 Methode eine Zinszahlung von

$$\frac{15 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 15}{360} \cdot 0,06 \cdot 500.000 = 15.000,00$$

errechnet.

**LI 87** **Kreditrisiko:** Erkläre den Begriff Kreditrisiko. Was ist das (Kredit-)Rating einer Schuldnerin?

Unter **Kreditrisiko** wird allgemein jene Gefahr verstanden, dass ein Kreditnehmer oder eine andere Vertragspartnerin, zukünftig (a) nicht in der Lage oder (b) nicht willens ist, vereinbarte Zahlungen (oder allgemeiner: vereinbarte Leistungen, denen ein monetärer Wert zugeordnet werden kann) zeitgerecht und vollständig zu erbringen. Diese Gefahr besteht für eine Bank in Bezug auf jeden gewährten Kredit, sodass das Management des Kreditrisikos ein zentraler Teil des Managements einer Bank ist.

Banken bewerten das Kreditrisiko Ihrer Kunden meist über ihr internes Ratingsystem. Dabei werden meist (a) qualitative Faktoren und (b) quantitative Faktoren analysiert bzw. bewertet. Bei der Vergabe eines Kredits an ein Unternehmen, umfasst (a) die **qualitative Analyse** etwa (a.1) das Risiko der

Industrie, in welcher das Unternehmen tätig ist, also z.B. den Wettbewerbsdruck, Markteintrittsbarrieren oder die Korrelation des Sektorergebnisses mit dem allgemeinen Wirtschaftswachstum, (a.2) die Diversifikation in Bezug auf angebotene Produkte, Distributionskanäle oder Kundenstock, (a.3) die organisatorische Struktur des Unternehmens (bei Konglomeraten) und (a.4) die Erfahrung und belegbare Leistung des Managements. Die (b) **quantitative Analyse** widmet sich hingegen finanziellen Größen, u.U. auch im Sektorvergleich, wie (b.1) den Erlösen und dem Unternehmensertrag (z.B. EBITDA<sup>4</sup>), (b.2) der Eigenkapitalausstattung, (b.3) der Verschuldung (z.B. Fremdkapital/Eigenkapital) oder (b.4) der Zins- bzw. Schuldendienstdeckung (EBITDA/Zinsen bzw. EBITDA/(Zinsen+Tilgung)).

Nehmen Schuldner ihr Geld über Kapitalmärkte, also über Investoren durch die Ausgabe von Anleihen aus, so übernimmt meist eine externe **Ratingagentur** die Bewertung des Kreditrisikos auf Anfrage des Unternehmens. Die bekanntesten Ratingagenturen sind Moody's, Standard and Poor's (S&P) und Fitch.<sup>5</sup> Das Ergebnis des Ratingprozesses hilft Investoren zu entscheiden, ob und zu welchen Bedingungen sie Anleihen kaufen und so dem Unternehmen Fremdkapital zur Verfügung stellen. Das Ergebnis des Ratings ist eine Art Note: AAA (man sagt: 'Triple-A') ist die bestmögliche Note und deutet auf ein sehr geringes Ausfallsrisiko hin. Bei einem Rating von AAA über AA und A hin zu BBB, spricht man von einem sogenannten **Investment-Grade** Rating, das als relativ sicher gilt. Investments, die schlechter als BBB geratet sind, gelten als *spekulativ*.<sup>6</sup> Für jede Ratingklasse veröffentlichen die Ratingagenturen periodisch **historische Ausfallraten**. Abbildung 4.2 zeigt die durchschnittlichen Ausfälle (als % des Volumens) je nach Ratingklasse und innerhalb von ein bis 10 Jahren ab Ausgabe. Wir sehen, dass weniger als 1% der Schuldnerinnen mit einem AAA Rating innerhalb von 10 Jahren ausfallen, bei einem BBB Rating liegt der Wert immer noch nur knapp über 4%. Es ist wichtig, historische Ausfallraten nicht mit zukünftigen Ausfallswahrscheinlichkeiten zu verwechseln (im Jahr 2009, inmitten der Finanzkrise, waren die Ausfallswahrscheinlichkeiten einzelner Ratingklassen u.U. wesentlich höher als die durchschnittlich beobachteten Werte dieser Klassen).



74 Überlege und beschreibe, wo wir im täglichen Leben Kreditrisiko ausgesetzt sind.

**Lösung:** Nicht nur Banken, sondern auch wir im alltäglichen Leben sind dem Kreditrisiko ausgesetzt. (1) Beim Abschluss einer Versicherung tragen wir als Versicherungsnehmer das Risiko, dass die Versicherung eine Leistung im Schadensfall nicht zahlen kann oder will. (2) Nach der Einlage von Geldbeträgen auf ein Bankkonto, tragen wir das Kreditrisiko, dass die Bank zu einem späteren Zeitpunkt nicht fähig ist, den eingezahlten Betrag wieder auszuzahlen. Dieses Risiko wird in Europa durch die Einlagensicherung gemildert. (3) Beim Kauf eines Produkts gegen Vorauszahlung sind wir dem Kreditrisiko ausgesetzt, dass das Unternehmen weder das Produkt liefert, noch eine Rückzahlung leisten kann. (4) Beim Kauf eines Gutscheins für den zukünftigen Erwerb von Produkten oder Serviceleistungen sind wir dem Kreditrisiko des Aus-

<sup>4</sup>EBITDA steht für *Earnings before Interest, Taxes, Depreciation and Amortization* und stellt eine Größe dar, die näher am Cashflow ist, als beispielsweise der EBIT. Der EBITDA wird oft für die Berechnung von Kennzahlen herangezogen.

<sup>5</sup>Nähere Informationen sind unter [www.moody.com](http://www.moody.com), [www.standardandpoors.com](http://www.standardandpoors.com) bzw. [www.fitchratings.com](http://www.fitchratings.com) zu finden.

<sup>6</sup>Ratingagenturen veröffentlichen ihre Ratingkriterien, was interessanten Lesestoff für an Kreditrisiko Interessierte bietet. S&P und Fitch verwenden (fast) die gleiche Ratingskala: AAA (bestes Rating), AA, A, BBB, BB, B, CCC, (CC, C), D (Zahlungsausfall). Die einzelnen Ratings können zusätzlich durch ein (+) (oberes Ende) oder (-) (unteres Ende) verfeinert werden. Moody's verwendet eine ähnliche Skala: Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa, Ca, C (Zahlungsausfall).

Rating	Year 1	Year 2	Year 3	Year 4	Year 5	Year 6	Year 7	Year 8	Year 9	Year 10
Aaa	0	0	0	0.035	0.078	0.129	0.186	0.191	0.191	0.191
Aa	0.009	0.021	0.048	0.115	0.183	0.229	0.263	0.291	0.315	0.366
A	0.020	0.101	0.241	0.372	0.499	0.637	0.766	0.899	1.015	1.095
Baa	0.192	0.529	0.943	1.436	1.939	2.428	2.885	3.292	3.674	4.070
Ba	1.166	3.238	5.835	8.453	10.688	12.713	14.479	16.045	17.471	18.889
B	4.663	10.286	15.752	20.574	25.022	29.192	33.068	36.342	39.083	41.238
Caa	15.371	25.497	33.792	40.661	45.803	49.430	51.870	54.519	59.178	65.735
Ca-C	32.905	43.080	51.514	56.862	63.287	66.166	70.860	75.522	75.522	75.522
Investment-Grade	0.069	0.208	0.397	0.616	0.834	1.045	1.237	1.409	1.564	1.710
Speculative-Grade	4.478	9.005	13.407	17.285	20.622	23.565	26.146	28.317	30.181	31.826
All Rated	1.594	3.184	4.689	5.979	7.042	7.939	8.690	9.300	9.803	10.234

**Abbildung 4.2:** Durchschnittliche (1983-2007) kumulative historische Ausfallraten (in %) von gerateten Firmenschulden nach Ratingklasse und Anzahl der beobachteten Jahre, gewichtet nach Schuldvolumen (Quelle: Moody's [45]).

stellern ausgeliefert, dass, zum Beispiel im Fall einer Insolvenz, weder die Leistung, noch eine Rückzahlung erfolgt. Diese Liste kann beliebig erweitert werden.

**LI 88** Rang eines Anspruchs/Kreditbesicherung: Erkläre den Begriff Rang bzw. Vor-/Nachrangigkeit von Ansprüchen. Wann sind Ränge relevant? Was bewirkt eine Kreditsicherheit in diesem Zusammenhang?

Zusätzlich zur Kreditrisikoanalyse, verlangt eine Bank bei Kreditbegebung oft Sicherheiten. Diese können

- Hypothekarische Sicherstellung (also Eintragung einer Schuld im Grundbuch),
- Bürgschaften, Garantien bzw. Patronate oder
- sonstige Sachsicherheiten (z.B. Fahrzeuge oder Maschinen eines Unternehmens)

umfassen. Während Sicherheiten selbst eine Insolvenz nicht verhindern, stellen sie den besicherten Gläubiger im Fall einer Verwertung der Unternehmensaktiva im Rahmen eines Insolvenzverfahrens besser. Der besicherte Gläubiger hat ein sogenanntes **Absonderungsrecht** bezüglich der Sicherheit.<sup>7</sup> Praktisch bedeutet das, dass z.B. im Fall einer hypothekarischen Sicherstellung das Grundeigentum aus der Insolvenzmasse herausgelöst und verkauft wird. Den Erlös erhält vorrangig der besicherte Gläubiger zur Bedienung seiner offenen Forderung; besteht nach der Verwertung der Sicherheit noch ein Anspruch des Gläubigers, kann er diesen als (Rest-)Forderung gegen die verbleibende Insolvenzmasse geltend machen. Sicherheiten senken somit in der Regel die **Verlustquote** (engl. *Loss Given Default* (LGD)) des Gläubigers im Verwertungsfall.

Neben Sicherheiten spielt noch der Rang einer Forderung im Insolvenzverfahren eine Rolle. So kann Gläubiger A **vorrangig** zu Gläubiger B bedient werden. Werden Gläubiger B und C gleich behandelt, also haben sie den gleichen Rang, so spricht man von **pari passu** (lat. für gleichen Schritts) Forderungen. Ränge können auf Gesetzen (vorrangige Auszahlung von Gehältern oder Sozialversicherungsforderungen), Strukturen (eine Bank leiht an die Tochterfirmen, eine andere an die Mutterfirma) oder Verträgen (die Gläubiger regeln den Insolvenzfall unter sich vertraglich im Rahmen eines **Intercreditor Agreements**) beruhen. Im Folgenden illustriert ein einfaches Beispiel die Rolle von Sicherheiten

<sup>7</sup>Detaillierte Informationen sind auf [www.wko.at](http://www.wko.at) unter dem Punkt 'Gläubiger im Insolvenzverfahren' zu finden (Stand: 05/2014).

und Rängen im Insolvenzfall.



**75** Ein Schuldner nimmt 30 Mio. bei Bank A, 40 Mio. bei Bank B und 20 Mio. bei Bank C auf. Bank A wird im Insolvenzfall vorrangig bedient, Bank B und C haben den gleichen Rang. Bank B erhält allerdings eine hypothekarische Sicherheit über eine Liegenschaft. Der Schuldner kann Zinsen und Tilgung nicht mehr bezahlen und beantragt Insolvenz. Der Insolvenzrichter entscheidet, dass es zum Konkursfall, also zur Verwertung aller verbleibenden Güter kommt. Die Liegenschaft kann um 30 Mio. verkauft werden, die restlichen Aktiva bringen 45 Mio. ein. Welcher Gläubiger bekommt wieviel?

**Lösung:** Zuerst wird die Liegenschaft aus der Insolvenzmasse abgesondert und um 30 Mio. verkauft. Die Erlöse gehen an Bank B, die nun eine Restforderung von 10 Mio. hat. Von den 45 Mio. wird vorrangig Bank A bedient, und erhält die vollen 30 Mio. Nun verbleiben 15 Mio. die auf die *pari passu* Gläubiger B und C mit ihren verbleibenden Forderungen von 10 bzw. 20 Mio. aufgeteilt werden. Die Summe wird im Verhältnis der Forderungen aufgeteilt: Bank B erhält weitere 5 Mio., während Bank C 10 Mio. erhält. Das ist noch einmal in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

	Forderung (in Mio.)	vom Liegenschaftserlös	aus der Insolvenzmasse	Gesamt	Verlust- quote
Bank A	30	–	30	30	0,0%
Bank B	40	30	5	35	12,5%
Bank C	20	–	10	10	50,0%
Gesamt	90	30	45	75	16,7%

Der unbesicherte, nachrangige Gläubiger, Bank C, war im Vergleich zu den übrigen Gläubigern wesentlich schlechter gestellt, und erleidet somit die höchste Verlustquote von 50%.

#### 4.1.2 Geld- und Kapitalmarktprodukte, Derivate

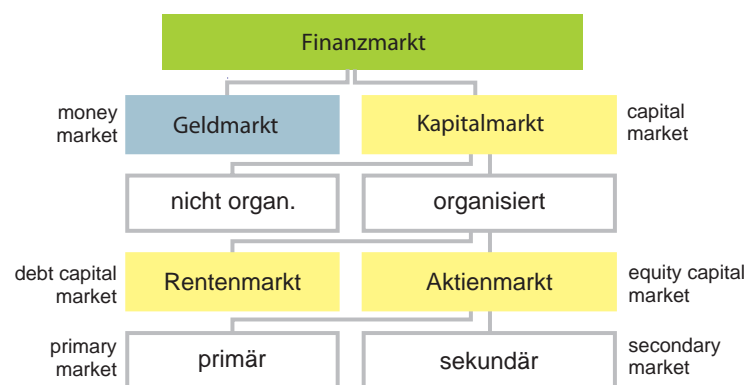
**LI 89** **Finanzmarkt:** *Wie unterteilt sich der Finanzmarkt? Wer sind die Teilnehmer am Geldmarkt bzw. Kapitalmarkt? Was sind Primär bzw. Sekundärmärkte?*

Finanzmärkte können, wie in Abbildung 4.3 dargestellt, nach mehreren Aspekten kategorisiert werden. (1) Wir unterscheiden bezüglich der *Laufzeit* der Instrumente in (1.a) **Geldmärkte** für Instrumente mit einer Laufzeit von bis zu einem Jahr und (1.b) **Kapitalmärkte** für Laufzeiten über einem Jahr. In manchen Darstellungen werden **Kreditmärkte** noch gesondert ausgewiesen, man kann sie aber auch zu nicht-organisierten Kapitalmärkten zählen. (2) Die Aufteilung in nicht-organisierte und organisierte Kapitalmärkte ist nicht immer so klar. Auf jeden Fall sind Produkte, die an zentralen Börsen gehandelt werden, den organisierten Kapitalmärkten zuzuordnen. Produkte, die gehandelt werden, indem sich ein Käufer und ein Verkäufer auf einen Preis einigen, können trotzdem organisiert sein indem es gewisse Marktstandards gibt (z.B. im Anleihenhandel), oder eher nicht-organisiert wenn Geschäfte nicht standardisiert erfolgen (z.B. beim Handel von individuellen Krediten). (3) Im organisierten Kapitalmarkt unterscheiden wir im Wesentlichen (a) festverzinsliche Instrumente die am Rentenmarkt gehandelt werden und (b) variabelverzinsliche Titel (generell Unternehmensanteile bzw. Aktien) die dann typischerweise an Aktienmärkten gehandelt werden. Mischungen aus beiden Klassen werden als **Hybridinstrumente** bezeichnet. Wichtig: der Begriff 'fest' bei festverzinslich bezieht sich auf feste

Zeitpunkte, an denen Erträge (z.B. Zinsen) an Investoren ausgeschüttet werden. Die Höhe dieser Erträge muss im Voraus nicht fest definiert sein (wie z.B. bei variabel verzinsten Anleihen). Kapitalmarktinstrumente werden zu Beginn am **Primärmarkt** emittiert (z.B. mittels Auktion), und dann am **Sekundärmarkt** zwischen Investoren weitergehandelt.

Typische Investorengruppen umfassen

- An den *Kapitalmärkten*: Versicherungen, Banken, Pensionsfonds, Investmentfonds, Staatsfonds (engl. *sovereign wealth funds*, kurz:SWF, wie ADIA, CIC, GIC, oder der staatliche Oljefondet in Norwegen), private Investoren. Als Referenz: mit Jahresende 2009 hielten Versicherungen und Pensionsfonds zusammen ca. US\$45.000 Milliarden an Finanzanlagen (das entspricht ca. 25% aller Finanzanlagen weltweit; Quelle: SwissRe, Sigma 05/2010). Dies unterstreicht, welche nachfragemäßigen Auswirkungen regulatorische Veränderungen bzgl. der Investitionsmöglichkeiten der Versicherungs- bzw. Pensionsbranche auf die Finanzmärkte haben können.
- An den *Geldmärkten*: im Wesentlichen Banken, Versicherungen und Geldmarktfonds. Auch Unternehmen können Geld hier kurzfristig ausleihen oder anlegen.



**Abbildung 4.3:** Schematische Kategorisierung der Finanzmärkte.

**LI 90** **Aktie:** Erkläre den Begriff 'Aktie'. Welche Rechte hat ein Unternehmenseigner bzw. ein Aktionär gewöhnlich?

Bei der Gründung einer sogenannten **Aktiengesellschaft** (AG) wird von Investoren das *Grundkapital* eingebracht, im Gegenzug erhalten sie Unternehmensanteile in Form von **Aktien**. Wichtig: die Aktiengesellschaft, die eine eigene Rechtspersönlichkeit darstellt, hat keine rechtliche Verpflichtung, die Kapitaleinlage an die Aktionäre zurückzuzahlen oder andere Ausschüttungszahlungen (z.B. Dividenden) an die Aktionäre zu leisten.

Eine Aktie berechtigt ihren Halter generell,

- entsprechende Anteile an etwaigen **Kapitalausschüttungen** (in der Regel: Dividenden) zu erhalten,
- Unternehmensentscheidungen indirekt über ein **Stimmrecht** bei der Aktionärsversammlung mitzufällen (z.B. die Entscheidung über die Auszahlung einer Dividende kann mit einer einfachen Mehrheit, d.h. mit 50%+1 der abgegebenen Stimmen, beschlossen werden) und

- einen entsprechenden Anteil der Nettoerlöse *nach Bezahlung aller ausstehenden Gläubigerinteressen* im Fall einer Unternehmensauflösung bzw. Liquidation ('**Residualanspruch**') zu erhalten.

Bei der Umwandlung einer Gesellschaft (z.B. GmbH) in eine Aktiengesellschaft werden Aktien oft im Zuge eines sogenannten **IPOs** ('Initial Public Offerings') ausgegeben. Danach können Aktien an Börsen gehandelt werden. Heute sind viele Börse-Handelssysteme elektronisch. Die deutsche Börse und die Wiener Börse etwa verwenden das Handelssystem Xetra. Der Zugang zum Handel ist z.B. Finanzinstituten, Wertpapierhandelshäusern und Brokern geöffnet. Einzelinvestoren handeln dann oft über die Online-Plattform eines Brokers oder über ihr Finanzinstitut. Mehr Informationen sind unter [www.xetra.com](http://www.xetra.com) zu finden.



**Abbildung 4.4:** Eine Apple Aktie: während Aktieninhaber oft nur elektronisch direkt oder indirekt (über den Broker) registriert sind, kann man sich alternativ meist auch die Aktienurkunde zuschicken lassen, die sonst von einem Treuhänder verwahrt wird.

**LI 91** **Limit Order Book:** Was ist ein Limit Order Book (dt. Blotter)? Erkläre die Begriffe 'Geldkurs' und 'Briefkurs'. Was ist ein Market Order?

Der Aktienhandel an der Börse wird heutzutage meist über elektronische **Limit-Order-Books** (auch: *Blotter*) abgewickelt. Um zu verstehen, wie ein Limit-Order-Book funktioniert, betrachte das folgende Beispiel (z.B. für den Handel der Aktien eines Unternehmens).

Bid (dt. Geldkurs)			Ask (dt. Briefkurs)		
Käufer	Anzahl	max. Preis	Verkäufer	Anzahl	min. Preis
A	8	313,8	E	12	314,6
B	15	312,6	F	5	317,6
C	16	308,8	G	20	322,2
D	22	300,4			

Auf der linken Seite des Buches tragen sich Marktteilnehmer, die eine gewisse Anzahl der Aktie kaufen möchten, ihre **Bids** (d.h. einen Maximalpreis) ein. Auf der rechten Seite des Buches notieren potentielle Verkäufer eine Anzahl und einen **Ask** (d.h. einen Minimalpreis). Wir sehen, dass der höchste Kaufpreis im Moment unter dem niedrigsten Verkaufspreis liegt; damit kommt im Moment kein Handel zustande. Der Unterschied  $314,6 - 313,8$  heißt **Spread**. Neue sogenannte **Limit Buy** bzw. **Limit Sell** Orders werden auf der linken bzw. rechten Seite des Order-Books hinzugefügt. Ist dann ein Handel möglich, wird dieser vom Algorithmus ausgeführt. Wie ein Handel funktioniert, wird an den folgenden **Market-Orders** klar. Bei einem Market-Order wird kein Preis spezifiziert, sondern die Transaktion zu den *bestmöglichen* Preisen ausgeführt.



- Market Buy Order (für 15 Stück): der Algorithmus bedient das Order durch 12 Stück von E um je 314,6 und 3 Stück von F um je 317,6 - das ergibt einen Durchschnittspreis 315,2.
- Market Sell Order (für 15 Stück): an die entsprechenden Höchstbieter, d.h. 8 Stück zu 313,8 und 7 Stück zu 312,6. Der Durchschnittspreis für diesen Trade ist dann 313,24.

Wir sehen also, dass es im Moment keinen fixen Preis für eine Aktie gibt, sondern sich Trade-Preise aus Angebot und Nachfrage im Limit Order Book ergeben. Die Börse registriert dann die Preise, zu denen an einem Tag gehandelt wird, und berichtet oft (a) den Eröffnungspreis (Open), den letzten Preis (Close), den Höchstpreis (High), den niedrigsten Preis (Low) und den Durchschnittspreis (Average) eines Handelstages. Handelssysteme lassen in der Regel eine Vielzahl von Order-Typen zu, eine genaue Beschreibung der Handelsmöglichkeiten am Xetra-System kann in Deutsche Börse [2] nachgelesen werden.

**LI 92** **Anleihe:** Erkläre den Begriff der Anleihe. Wer begibt und wer kauft Anleihen und warum? Was sind Bullets bzw. Couponbonds.

Im Gegensatz zu Aktien, sichert der Begeber eines verzinslichen Vermögenstitels (in der Regel: **Anleihen** bzw. **Bonds**) (a) die Rückzahlung (auch: Tilgung) eines Kapitalbetrags (engl. *principal* oder *face value*), sowie (b) die Zahlung von Zinsen (engl. *interest*) zu. Die Zeitpunkte, zu denen diese Zahlungen stattfinden sind im Voraus festgelegt. Die Höhe der Zahlungen kann dabei *fix* oder *variabel* vereinbart sein. Anleihen sind somit grundsätzlich (verbriefte) Kredite, die am Kapitalmarkt gehandelt werden können. Der Vorteil von Anleihen besteht darin, dass Geld nun nicht nur von Banken, sondern allgemein von Kapitalmarktteilnehmern geliehen werden kann. Besonders Versicherungen, Pensionsfonds und Rentenfonds investieren in Anleihen. Sie schätzen (a) ein planbares, regelmäßiges Einkommen über die Zinszahlungen (während Dividenden an Aktieninhaber z.B. in Verlustjahren ausgesetzt werden) und (b) das geringere Risiko der Anleihen im Vergleich zu Aktien (im Konkursfall werden Forderungen der Anleiheninvestoren getilgt, bevor das restliche Vermögen auf die Aktionäre aufgeteilt wird).

Große Fremdkapitalbeträge können Unternehmen oft leichter am Anleihenmarkt als am Kreditmarkt ausleihen, da die Kapazität der einzelnen Banken am Kreditmarkt oft begrenzt ist. Die prozentuellen Kosten und Gebühren einer Anleiheausgabe übersteigen jedoch meist die einer Kreditaufnahme. Anleihen werden meist von Unternehmen, Gebietskörperschaften, Institutionen oder Staaten ('Staatsanleihen') begeben. Weiters besteht die Möglichkeit für Versicherungen und Banken, im Sinne eines aktiven Portfoliomanagements ausgewählte Risiken (z.B. Kredite, Hypotheken, Versicherungen) an speziell gegründete Zweckgesellschaften zu verkaufen, welche den Kauf durch Begebung von Anleihen finanzieren. Solche Anleihen heißen dann **Asset-Backed Securities** (im Fall der Finanzierung von Krediten oder anderer Schuldtitel) und **Insurance-Linked Securities** (im Fall von Versicherungen; z.B. bei der Versicherung von Naturkatastrophen).

Die Anleihe wurde ursprünglich als Urkunde begeben, wie in Abbildung 4.5 dargestellt. Der obere (große) Teil wird **Mantel** genannt und beurkundet die versprochene Kapitalzahlung (hier: US\$100) zum Ende der Laufzeit der Anleihe. Zusätzlich enthält die Anleihe einen **Bogen** bestehend aus **Kupons** (hier: zu je US\$3), die zu den vorgesehenen Zahltagen (hier: einmal pro Halbjahr) bei der Bank gegen Bargeld eingetauscht werden konnten. Der Begriff 'Kupon' ist auch heute noch für Zinszahlungen

einer Anleihe geläufig. Heute wird die Urkunde meist treuhänderisch verwahrt, und Auszahlungen werden elektronisch durchgeführt.



**Abbildung 4.5:** Anleihe der konföderierten Staaten von Amerika, Laufzeitende 1894, Mantel (oben) und Kupons (unten).

**LI 93** **Staatsanleihen:** Erkläre Staatsanleihen. Wie funktionieren diese Papiere? Wer investiert in Staatsanleihen? Wie oft begeben Staaten Staatsanleihen?

**Staatsanleihen** (engl. *government bonds*) sind Anleihen, die von staatlichen Körperschaften begeben werden. Im Speziellen muss sich ein Staat Geld borgen, (1) wenn die Ausgaben in einem Haushaltsjahr die Einnahmen übersteigen oder (2) um fiskalpolitische Maßnahmen zu finanzieren (vgl. LI 79 bis 81) oder (3) um ausstehende Schulden zu refinanzieren (also: eine alte Schuld durch eine neue zu ersetzen). Staatsanleihen gelten grundsätzlich als sehr sicher, dennoch kommt es immer wieder zu staatlichen Insolvenzen, im Rahmen derer versprochene Zins- bzw. Kapitalzahlungen nicht geleistet werden können. In der jüngeren Geschichte dienen Argentinien (2001/02), Island (2008) und Griechenland (2010) als Beispiele von *Staatsinsolvenzen*. Das Risiko einer Staatsanleihe kann wesentlich erhöht sein, wenn (a) das begebende Land nicht eigenständig über fiskal- bzw. monetärpolitische Maßnahmen entscheiden kann (z.B. Länder die nicht selbst 'Geld drucken können', wie Euro-Länder) oder (b) die Anleihe in einer Fremdwährung begeben wird (z.B. argentinische Anleihen wurden vor der 2001/02 oft als US\$-Anleihen begeben; fällt die Kaufkraft der eigenen Währung zu stark, kann man nicht mehr ausreichend Fremdwährung kaufen, um die Schuld zu bedienen).

Staatsanleihen werden von *Investoren* gekauft, die Investments mit *geringem Risiko* suchen und sich mit *geringen Renditen* zufrieden geben. Versicherungen, Pensionsfonds, Banken, Anleihenfonds, sowie Zentralbanken und Regierungen treten oft als Investoren in Staatsanleihen auf. Um die eigene Währung zu stützen, kauft die Zentralbank der Schweiz seit 2011 beispielsweise EUR-Staatsanleihen mit ausgezeichnetem Rating; dadurch gibt es mehr Angebot an CHF und mehr Nachfrage nach EUR, sodass der CHF relativ zum EUR sinkt, was wiederum das Wirtschaftswachstum in der Schweiz begünstigt.

Staatsanleihen werden sowohl kurzfristig (bis ein Jahr), mittelfristig (zwei bis fünf Jahre) und langfristig (über fünf Jahre) begeben. Dabei gibt es oft unterschiedliche Namen für die verschiedenen Fristigkeiten: in Deutschland findet man beispielsweise **Schatzbriefe** ('Schatz'; 1 bzw. 2 Jahre Laufzeit), **Bundobligationen** ('Bobl'; 5 Jahre) und **Bundesanleihen** ('Bund'; 10 oder mehr Jahre). In den USA unterscheidet man **T-Bills** (max. 1 Jahr Laufzeit), **T-Notes** (2 bis 10 Jahre) und **T-Bonds**

(über 10 Jahre), wobei 'T' für *Treasury* steht. In Deutschland werden Anleihen von der *Deutschen Finanzagentur* herausgegeben. Investoren können neue Ausgaben im Rahmen einer Auktion erwerben; solche Auktionen finden das ganze Jahr über statt (vgl. Abbildung 4.6; es werden Neuausgaben (new issue) und Aufstockungen bestehender Ausgaben (reopenings) unterschieden). Nach der Erstausgabe werden Staatsanleihen am *Sekundärmarkt* zwischen Investoren direkt gehandelt (z.B. Bank A verkauft eine Anleihe an Versicherung B).

Issuance Outlook of the Federal Government 2014 (€ bn)*																
Security	Share 2014	Annual Change € bn	Volume 2014 € bn	Q1 2014			Q2 2014			Q3 2014			Q4 2014			
				Jan	Feb	Mar	Apr	May	June	July	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec	
				N R	N R	N R	N R	N R	N R	N R	N R	N R	N R	N R	N R	
Schatz 2Y	25.4 %	-8	52	4	5	4	4	5	4	4	5	4	4	5	4	
Bobl 5Y	23.4 %	-3	48	5	4	4	3	5	4	4	3	5	4	4	3	
Bund 10Y	26.3 %	0	54	5	5	4	4	5	5	4	4	5	5/4	4		
Bund 30Y	3.4 %	-1	7		3			2						2		
Capital Market	78.5 %	-12	161		43			41			38			39		
Bubill 6M	10.7 %	-19	22	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		
Bubill 12M	10.7 %	-11	22	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		
Money Market	21.5 %	-30	44		12			12			12			8		
Year total: € 205 bn				18	21	16	15	21	17	29	26	25	23	17	7	

N: new issue / R: reopening / Bund10 / Bund30: federal bonds with maturities of 10 or 30 years / Bobl: five year federal notes / Schatz: two year federal treasury notes / Bubills: treasury discount papers with maturities of 6 and 12 months

**Abbildung 4.6:** Ausgabekalender 2014 für Anleihen der Bundesrepublik Deutschland als Schuldnerin (Quelle: [www.deutsche-finanzagentur.de](http://www.deutsche-finanzagentur.de)).

#### LI 94 Yield einer Anleihe: Was ist der Marktzinssatz (oder: die Yield) einer Anleihe?

Eine Anleihe wird im Moment (also: zum Zeitpunkt  $t_0$ ) zum Preis  $P_0$  gehandelt. Die Anleihe verspricht Zahlungen in der Höhe von  $c_1, c_2, c_3, \dots$  zu den Zeitpunkten  $t_1, t_2, t_3, \dots$  (allgemein: Zahlungen  $c_i$  zu den Zeitpunkten  $t_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, n$ ). Bei diesen versprochenen Zahlungen handelt es sich grundsätzlich um (a) Zinszahlungen (Coupons) und (b) Kapitalrückzahlungen. Der **Marktzinssatz** (auch: die Yield, Yield-to-Maturity, YTM) der Anleihe ist dann jener *Diskontierungssatz*  $y$ , für den die Summe der abgezinsten (versprochenen) Zahlungen an die Anleihenhalter genau den Preis der Anleihe ergibt, d.h. es gilt

$$P_0 = c_1 \cdot (1 + y)^{-t_1} + c_2 \cdot (1 + y)^{-t_2} + \dots + c_n \cdot (1 + y)^{-t_n} = \sum_{i=1}^n c_i \cdot (1 + y)^{-t_i}. \quad (4.1)$$

Die Yield ist somit der **interne Zinsfuß** (engl. *internal rate of return*<sup>8</sup>) eines Anleihenkaufs zum heutigen Preis  $P_0$ . Anleihen, für die das Risiko eines Zahlungsausfalls des Emittenten höher ist, haben meist eine höhere Yield, d.h. Zahlungsverprechen werden zur Preisfindung stärker diskontiert.



**76** Eine Anleihe mit einem Nennwert von €100 hat eine Laufzeit von 4 Jahren und bezahlt einen jährlich nachschüssigen Coupon von 6%. Bei der Anleihe handelt es sich um einen sogenannten *Bullet*, d.h. die gesamte Kapitalrückzahlung erfolgt zum Ende der Laufzeit. Die Anleihe wird zum Ausgabezeitpunkt  $t_0 = 0$  um  $P_0 = €94$  gehandelt. Bestimme die Yield der Anleihe. Wie hoch wäre die Yield, wenn die Anleihe um  $P_0 = €100$  gehandelt

<sup>8</sup>Häufig wird der Marktzinssatz deshalb mit  $i$  bezeichnet.

würde? Welcher allgemeine Zusammenhang lässt sich zwischen der Yield und dem Preis eines Bullets feststellen?

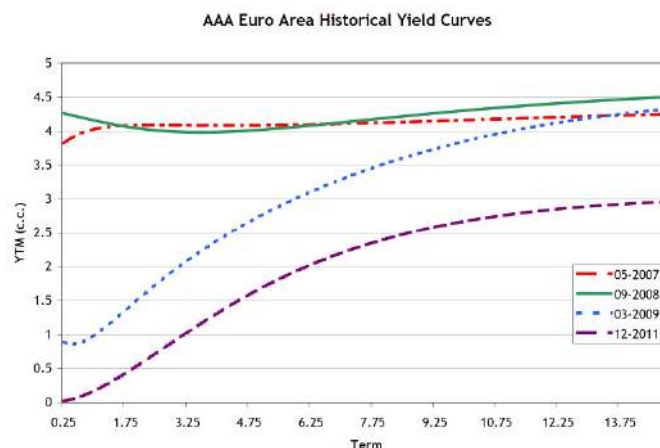
**Lösung:** Wir berechnen die Yield  $y$  indem wir die Gleichung

$$94 = 6 \cdot (1 + y)^{-1} + 6 \cdot (1 + y)^{-2} + 6 \cdot (1 + y)^{-3} + 106 \cdot (1 + y)^{-4}$$

numerisch (z.B. Mathematica, Excel-Zielwertsuche) auflösen. Wir erhalten  $y = 7,804\%$ . Ist der Coupon eines Bullets gleich der Yield, so entspricht der Preis dem Nennwert der Anleihe. Umgekehrt muss die Yield 6% betragen, wenn der Preis der Anleihe bei  $P_0 = 100$  liegt. Allgemein gilt für Bullets: ist der Couponsatz *größer* als die Yield, so gilt Preis > Nennwert; ist der Coupon *kleiner* als die Yield, so gilt Preis < Nennwert.

**LI 95** **Yield Curve:** Erkläre die Zinsstrukturkurve für Yields. Verändert sich die Zinsstrukturkurve mit der Zeit?

Allgemein fällt die graphische Darstellung von Zins- oder Diskontierungssätzen für unterschiedliche Laufzeiten unter den Begriff 'Zinsstrukturkurve'. Stellen wir im Speziellen die Yields eines Emittenten (oder einer Risikoklasse) auf der  $y$ -Achse den unterschiedlichen Laufzeiten ( $x$ -Achse) gegenüber, so sprechen wir von der **Yield Curve**. Die Yield Curve für Staatsanleihen aus dem Euro-Gebiet der niedrigsten Risikoklasse (AAA) ist in Abbildung 4.7 dargestellt.



**Abbildung 4.7:** AAA Euro Yield Curve zu verschiedenen Referenzzeitpunkten (2007 bis 2011) (source: [www.ecb.int](http://www.ecb.int)).

Wir beobachten, dass sich die Yield Curve über die Zeit stark verändern kann. Die Kurve des Jahres 2011 würde man als *normale* Yield Curve bezeichnen: die Yield steigt mit der Laufzeit; Staaten müssen höhere Zinsen (genau genommen: Yields) bezahlen, je länger die Anleihe läuft. Zu Beginn der Finanzkrise, in den Jahren 2007 und 2008, sind jedoch die kurzfristigen Yields stark gestiegen, was auf die Verknappung von kurzfristigem Kapital zurückzuführen ist. Die Aufnahme von kurzfristigem Kapital wurde somit teurer. In diesen beiden Fällen beobachten wir eine beinahe *flache* Yield Curve.

**LI 96** **Zerorates:** Erkläre wie man Zero-Rates berechnet. Wie verwendet man diese zur Bewertung von Anleihen?

Wir stoßen nun auf das Problem, dass sich Yields für Anleihen unterschiedlicher Laufzeiten und Couponhöhen intuitiv oft nur schwer vergleichen lassen. Alternativ kann man die am Markt beobachteten Preise in Zinssätze übersetzen, indem man implizite **Zero-Rates** herleitet. Wir werden dies anhand eines einfachen Beispiels verdeutlichen. Betrachte zwei Anleihen: Anleihe  $A_1$  bezahlt den Nennwert von 100 nach einem Jahr (es handelt sich um einen sogenannten **Zero-Coupon Bond**), Anleihe  $A_2$

ist eine 4% Kuponanleihe mit einer Laufzeit von zwei Jahren und dem Nennwert 100. Beide Anleihen haben dieselbe Emittentin, und wir beobachten, dass  $A_1$  zu einem Preis von 96 und  $A_2$  zu einem Preis von 94 im Markt gehandelt wird. Wir können nun beide Anleihen als die Zusammenfassung von Zahlungen (a) nach einem Jahr und (b) nach zwei Jahren sehen. Existieren zum heutigen Zeitpunkt  $t_0$  (implizit) eindeutige Preise  $p_1$  pro einem versprochenen € nach einem Jahr und  $p_2$  pro einem versprochenen € nach zwei Jahren, so können wir diese Preise folgendermaßen berechnen. Dazu betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{(I): } & 100 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 = 96 \\ \text{(II): } & 4 \cdot p_1 + 104 \cdot p_2 = 94. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung dieses Gleichungssystem ist  $p_1 = 0,96$  und  $p_2 = 0,867$  (vgl. LI 24). Weiters können wir die Preise als Diskontierungsfaktoren interpretieren,  $p_1 = (1 + z_1)^{-1}$  und  $p_2 = (1 + z_2)^{-2}$ . Die sogenannten **Zero-Rates** (also: Diskontierungssätze) ergeben sich dann als  $z_1 = p_1^{-1} - 1 = 4,17\%$  und  $z_2 = p_2^{-1/2} - 1 = 7,40\%$ . Die Zero-Rates kann man nun verwenden um die Preise neuer Anleihen derselben Emittentin zu bewerten, eine zweijährige Anleihe mit einem Kupon von 8% sollte grundsätzlich zu einem Preis von

$$P_0 = 8 \cdot (1 + 0,0417)^{-1} + 108 \cdot (1 + 0,0740)^{-2} = 101,31$$

gehandelt werden.

Ähnlich zum obigen Beispiel kann man versuchen, basierend auf den Preisen aller gehandelten Anleihen einer Emittentin (z.B. der Bundesrepublik Deutschland), Zero-Rates für alle beobachteten Zahlungsfristen (also nicht nur ein Jahr und zwei Jahre) berechnen. Den Vorgang, implizite Zero-Rates aus Preisen zu berechnen, nennt man **Bootstrapping**. Die graphische Darstellung (ähnlich zu Abbildung 4.7) der verschiedenen Zero-Rates für die verschiedenen Fristigkeiten fällt wieder unter den Begriff *Zinsstrukturkurve* bzw. speziell spricht man hier von der **Zero Curve**.

**LI 97** **Bond duration:** *Wie berechnet sich die (Modified) Duration einer Anleihe? Was besagt die Duration einer Anleihe?*

Die (Modified) **Duration**  $D$  einer Anleihe bezüglich einer Yield  $y_0$  ist einfach **der negative Wert der Ableitung des Preises der Anleihe nach der Yield  $y$  an der Stelle  $y = y_0$  relativ zum Preis der Anleihe**, d.h. (vgl. 4.1)

$$D(y_0) = -\frac{P'_0(y_0)}{P_0} = -\frac{\sum_{i=1}^n c_i \cdot (-t_i) \cdot (1 + y_0)^{-t-1}}{\sum_{i=1}^n c_i \cdot (1 + y_0)^{-t}}, \quad (4.2)$$

wobei die Zeit  $t$  in Jahren gemessen wird. Für kleine Änderungen der Yield von  $y_0$  zu  $y$ , kann man zeigen, dass sich der Preis der Anleihe näherungsweise *relativ* um

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P - P_0}{P_0} \approx -D \cdot (y - y_0)$$

ändert.<sup>9</sup> Mit diesem Hilfsmittel kann man beispielsweise versuchen, auf der Aktivseite einer Bilanz

<sup>9</sup>Für Interessierte: dies sieht man leicht aus der sogenannten Taylor-Entwicklung der Preisfunktion

$$P(y) = P(y_0) + P'(y_0) \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2} P''(y_0) \cdot (y - y_0)^2 + R_2,$$

so zu investieren, dass die Durations der Aktiv- und der Passivseite in etwa übereinstimmen. Kleine Änderungen in der Yield führen so zu einer ähnlichen Änderung des Wertes der Aktiv- und der Passivseite. Diese Technik nennt man **Immunsierung** gegen (kleine) Yield-Schwankungen.



**77** Eine zweijährige Anleihe mit Nennwert 100 und einem jährlich nachschüssigen Kupon von 6% wird um 101 gehandelt. Berechne die Duration der Anleihe. Benutze die Duration der Anleihe um die relative Preisänderung (in Prozent) der Anleihe zu schätzen, für den Fall, dass die Yield der Anleihe um 2 Prozentpunkte steigt.

**Lösung:** Zuerst berechnen wir die Ausgangs-Yield  $y_0$  der Anleihe, indem wir

$$101 = 6 \cdot (1 + y_0)^{-1} + 106 \cdot (1 + y_0)^{-2}$$

lösen, als  $y_0 = 5,46\%$ . Die (Modified) Duration ergibt sich somit als

$$D(0,0546) = -\frac{6 \cdot (-1) \cdot (1 + y_0)^{-2} + 106 \cdot (-2) \cdot (1 + y_0)^{-3}}{101} = 1,84.$$

Die relative Veränderung des Anleihenpreises, wenn die Yield von 5,46% auf 7,46% steigt ergibt sich nach obiger Formel als

$$\frac{\Delta P}{P_0} \approx -D(0,0546) \cdot (0,0746 - 0,0546) = -1,84 \cdot 0,02 = -3,68\%.$$

Man kann die exakte Veränderung als  $(97,7 - 101)/101 = -3,58\%$  berechnen und sieht, dass trotz der relativ großen Veränderung nach oben noch eine gute Approximation der relativen Preisänderung mittels der Duration angegeben werden kann.

**LI 98** **Forward:** Erkläre die Struktur eines Forwards. Wie berechnen sich Zahlungen zwischen den Vertragsparteien am Verfallstag? Was ist der Unterschied zwischen Forwards und Futures? Wo werden Forwards/Futures gehandelt?

Wenn wir von *Handel* sprechen, denken wir oft an den *umgehenden Austausch* des Kaufpreises und des gehandelten Produkts. Den Markt, an dem gehandelte Produkte umgehend geliefert werden, nennen wir **Spotmarkt** (auch: Kassamarkt). Im Gegenzug dazu stehen Transaktionen am sogenannten **Terminmarkt** (engl. *Forward Market*): dort fixiert man vertraglich

- den Forward-Kaufpreis  $F$ ,
- die Produktspezifikationen (Qualität, Volumen/Menge) des Produktes (auch: **Basisproduktes**, engl. *Underlying*) und
- den *Ort und Zeitpunkt  $T$  in der Zukunft*, an/zu dem das Produkt gegen die Zahlung des Forward-Preises  $F$  (auch zum Zeitpunkt  $T$ ) geliefert wird.

Da sich der Preis des Produkts im Zeitraum bis zur Lieferung ändern kann, kann sich auch der Wert des Forward-Kaufvertrags ändern. Man sagt, dass der zukünftige Käufer in einem Terminkontrakt

wobei  $-D = P'(y_0)/P(y_0)$  gilt. Weiters nennt man den Ausdruck  $C = P''(y_0)/P(y_0)$  Konvexität des Anleihenpreises, sodass sich

$$\frac{\Delta P}{P(y_0)} \approx -D \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2} C \cdot (y - y_0)^2$$

ergibt.

(engl. *Forward*) eine **Long-Position** innehat, der Verkäufer eine **Short-Position**.



**78** Besuche die Website [www.cmegroup.com](http://www.cmegroup.com) der Chicago Mercantile Exchange. Dort werden standardisierte Forward-Verträge gehandelt. Finde heraus, welche Güter gehandelt werden können. Welche Vertragsspezifikationen weist ein Forward-Vertrag für Mais (engl. *Corn*) auf? Wer könnte ein natürliches Interesse haben, eine Short-Position in diesem Forward-Vertrag einzunehmen?

**Lösung:** Die Produktpalette umfasst Landwirtschaftsprodukte, Energie, Aktienindizes, Währungen, Zinsen, Metalle, Immobilien und Wetter. Als konkrete Beispiele kann man Gold, Silber, Brent Rohöl, EUR (zu bezahlen in USD), Reis und Milch anführen. Der Mais-Vertrag hat die folgenden Spezifikationen (pro einem Vertrag):

- Volumen: 5.000 Bushels (entspricht 127 metrischen Tonnen),
- Qualität: #2 Gelb (bei #1 Gelb steigt der Preis um 1.5cent/Bushel, bei #3 sinkt er um 1.5cent/Bushel; die Qualitäten #1, #2 und #3 werden genau definiert),
- Mögliche Liefertermine: März, Mai, Juli, September und Dezember eines jeden Jahres,
- Letzter Handelstag: 15. des Liefermonats, letzter Liefertag: 2. Businessstag nach Ende des Liefermonats.

Im Mai 2014 wurde der Terminkontrakt zu einem Forward-Preis<sup>a</sup> von ca. US\$5,00 pro Bushel gehandelt. Ein natürliches Interesse am Eingehen einer Short-Position könnte ein Produzent von Mais haben, der heute schon eine Erntemaschine kaufen muss, und den Preis seiner zukünftig verkauften Ernte bereits heute fixieren möchte, um durch seine Investition und allfällige Preisverfälle bis zum Verkauf der Ernte nicht in Zahlungsnot zu kommen.

<sup>a</sup>Für Interessierte: (a) wird das Produkt heute zum Preis  $S$  gehandelt, (b) kann man es bis zum Liefertermin  $T$  ohne Qualitätsverlust und wesentliche Lagerungskosten aufbewahren, und (3) kann man zum (stetigen) Zinssatz  $r$  Geld ausborgen und anlegen, so kann man zeigen, dass der **Forward-Preis**  $F$  gleich  $S \cdot e^{rT}$  sein muss. Details dazu können in Hull [25] nachgelesen werden.

Abschließend soll noch der Wert des Vertrags zum Zeitpunkt  $T$  der Lieferung diskutiert werden. Zum Zeitpunkt  $T$  wird das Produkt am Spotmarkt zum Preis  $S_T$  gehandelt, während im Forward-Vertrag der Forward-Preis  $F$  vereinbart ist. Daraus folgt:

- ein Vertrags-Wert für die Käuferin (Long-Position) von  $S_T - F$ : gilt  $S_T > F$  so kauft sie über den Forward-Vertrag billiger ein und der Vertrag hat einen positiven Wert, umgekehrt hat der Vertrag einen negativen Wert falls  $S_T < F$ , und
- ein Vertrags-Wert für die Verkäuferin (Short-Position) von  $F - S_T$ : gilt  $S_T < F$  so verkauft sie zu einem Preis, der über dem Marktpreis liegt, und gewinnt aus dem Forward-Vertrag.

Da der Wert (bzw. Gewinn/Verlust) des Forwardvertrags vom Wert  $S_T$  des Basisproduktes (engl. *Underlying*) abgeleitet (engl. *to derive*) werden kann, zählt man den Forward zur Gruppe der sogenannten **Derivate**. Statt der physischen Lieferung des Produktes kann es bei Terminkontrakten auch zu einer Ausgleichszahlung kommen, die den Wert des Forward-Vertrags reflektiert (engl. *Cash Settlement*). Die Abrechnungsprofile (engl. *Payoff-Profile*) für den Käufer (Long) und Verkäufer (Short) im Rahmen eines Forwards sind abschließend in Abbildung 4.8 für einen gegebenen Forward-Preis  $F$  und in Abhängigkeit des tatsächlichen Preises  $S_T$  dargestellt.

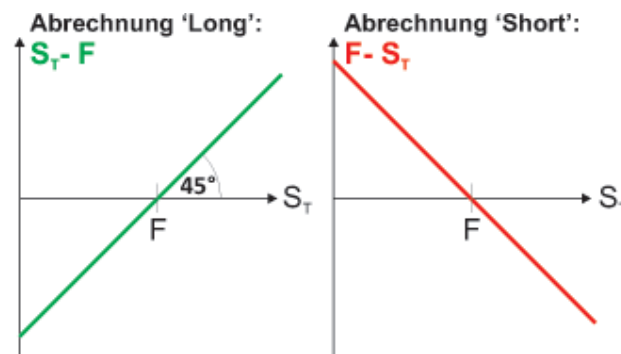


Abbildung 4.8: Forward: Pay-off Profile für Käufer (Long, links) und Verkäufer (Short, rechts).

**LI 99** FRA: Was ist ein Forward Rate Agreement? In welcher Höhe und wann erfolgt die Ausgleichszahlung?

In Analogie zu anderen Forward-Produkten, kann man auch Zinssätze für zukünftige Zeiträume fixieren: dies geschieht über sogenannte **Forward-Rate Agreements** (FRA). Dabei fixiert man Folgendes.

- Einen *Nennwert* (engl. *Notional*) als Berechnungsbasis für den FRA. Man kann sich den Nennwert als Kontostand vorstellen.
- Die **Forward-Rate** (d.h. eine fixe Zinsrate) und einen *Referenzzinssatz*, auf den sich die *Forward-Rate* bezieht (z.B. LIBOR oder EURIBOR).
- Die zukünftige Zinsperiode  $[t_1; t_2]$  vom Effektivdatum  $t_1$  bis zum Periodenende  $t_2$ .

Die Ausgleichzahlung (engl. *Pay-off*) zum Zeitpunkt  $t_1$  reflektiert dann den Unterschied zwischen den vorab vereinbarten Zinsen und den Marktzinsen zum Zeitpunkt  $t_1$ . Forward-Rate Agreements beziehen sich meist auf Zeiträume innerhalb der nächsten 12 Monate. Die Zinsperiode z.B. eines  $6 \times 9$ -FRAs beginnt nach Ablauf des 6. Monats und dauert bis zum Ende des 9. Monats (die Zinsperiode dauert somit  $9 - 6 = 3$  Monate). Im Speziellen ist die Ausgleichzahlung zum Zeitpunkt  $t_1$  meist wie folgt definiert (aus Sicht des Einlegers (engl. *Depositor*)):

$$\text{Pay-off} = \frac{\text{Nennwert} \cdot \tau \cdot (\text{Forward-Rate} - \text{Referenzzinssatz})}{1 + \tau \cdot \text{Referenzzinssatz}}, \quad (4.3)$$

wobei  $\tau$  dem Faktor 'Zinstage durch Tage im Zinsjahr' entspricht. Der Nenner zinst die Ausgleichszahlung vom Zeitpunkt  $t_2$  (zu dem normalerweise Zinsen ausgezahlt werden) zum Zeitpunkt  $t_1$  (zu dem die Ausgleichszahlung geleistet wird) ab.

**B** 79 Ein  $3 \times 6$  Forward-Rate Agreement definiert eine Forward-Rate von 4%. Der Vertrag bezieht sich auf US\$ 1 Mio (Nennwert). Nach 3 Monaten steht der Referenzzinssatz (z.B. US\$-LIBOR-3 Monate) bei 3%, nach 6 Monaten bei 5%. Berechne die Ausgleichszahlung zum Effektivdatum wenn die Zinsberechnungsmethode 30/360 verwendet wird.

**Lösung:** Der relevante Referenzzinssatz ist der 3-Monatssatz zu *Beginn* der Zinsperiode, der Zinssatz nach 6 Monaten bezieht sich auf den Zeitraum [6 Monate; 9 Monate] und ist irrelevant. Gemäß der Zinsberechnungsmethode wird der Zinssatz mit dem Faktor  $(30 + 30 + 30)/360$



multipliziert. Die Zahlung an den (fiktiven) Einleger nach 3 Monaten wird als (als US\$-Betrag)

$$\text{Pay-off} = \frac{1.000.000 \cdot \frac{90}{360} \cdot (0,04 - 0,03)}{1 + 0,03 \cdot \frac{90}{360}} = 2.481,3$$

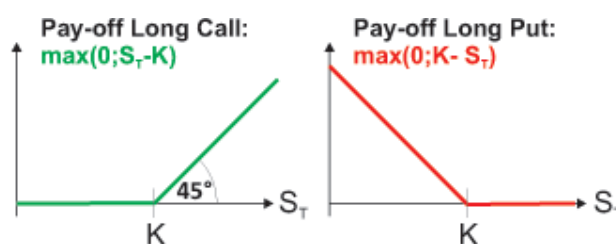
berechnet.

**LI 100** **Option:** Erkläre die Struktur einer Finanzoption (oder: Option). Wie berechnen sich Zahlungen am Verfalltag zwischen den Vertragsparteien? Wo werden Optionen gehandelt?

Eine **Option** ist ein Finanzkontrakt, bei der eine Vertragspartei (Long), gegen die Zahlung einer Prämie das Recht erwirbt, ein Produkt (auch: Basiswert, engl. *Underlying*; z.B. Aktie, Anleihe, Gold etc.) in der Zukunft zu einem definierten Ausübungspreis  $K$  (engl. *Strike*) zu kaufen oder zu verkaufen. Im Gegensatz zu Forwards gibt es keine Ausübungspflicht für den Käufer einer Option, sodass man Optionen zu den *bedingten* (auch: *asymmetrischen*) *Termingeschäften* zählt. Wir unterscheiden:

- **Europäische Optionen** (die nur zu einem bestimmten Ausübungszeitpunkt  $T$  (engl. *Maturity*) ausgeübt werden kann) und **Amerikanische Optionen** (die jederzeit bis spätestens zu einem spätestmöglichen Ausübungszeitpunkt  $T$  ausgeübt werden kann),
- **Call Optionen** (Rechte zu kaufen) und **Put Optionen** (Rechte zu verkaufen) und
- **Long Positionen** in einer Option (der Käufer und Rechteinhaber) und **Short Positionen** (der Verkäufer und *Stillhalter*).

Im Fall einer Call Option wird der Halter die Option nicht einlösen, wenn der Preis des Underlyings  $S_T$  zum Ausübungszeitpunkt unter dem vereinbarten Strike liegt - am Markt kann er das Basisprodukt billiger erwerben. Liegt der Marktpreis  $S_T$  über dem Strike  $K$ , so beträgt der Pay-off der Option  $S_T - K$ . Fasst man die beiden Fälle zusammen, so kann man den Pay-off einer Call Option als  $\max(0; S_T - K)$  schreiben. Der Pay-off einer Put Option ist hingegen  $\max(0; K - S_T)$ . Dies ist graphisch in Abbildung 4.9 dargestellt. Die Prämie einer Call oder Put Option, die bei Kauf entrichtet werden muss, ist immer positiv, da der Pay-Off nie negativ, aber möglicherweise positiv ist (genau genommen: mit positiver Wahrscheinlichkeit).



**Abbildung 4.9:** Call Option (links) und Put Option (rechts): Pay-off in Abhängigkeit vom Preis des Basiswerts  $S_T$  am Ausübungstag.

**LI 101** **Swap:** Erkläre die Struktur eines Swaps. Wie berechnen sich Zahlungen zwischen den Vertragsparteien? Wie werden Swaps dokumentiert? Gib ein Beispiel für den sinnvollen Einsatz eines Swaps.

Ein **Swap** ist ein Vertrag, in dem zwei Vertragsparteien (engl. *counterparties*) vereinbaren, zu (mehreren) definierten Terminen in der Zukunft Zahlungen oder Produkte auszutauschen. Den *Forward*, als einfachste Form des Swaps, an dem zu *nur einem* zukünftigen Zeitpunkt ein Produkt gegen eine

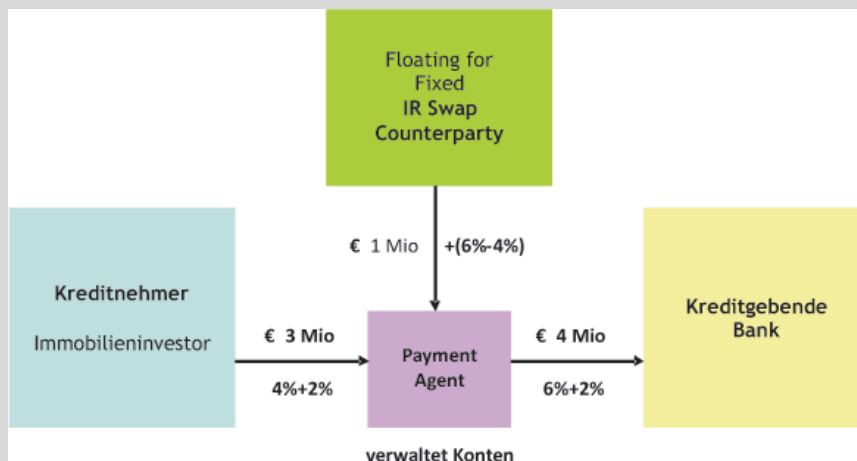
Zahlung getauscht wird, haben wir bereits kennengelernt (vgl. LI 98). Sehr häufig sind die sogenannten **Zinsswaps** (engl. *Interest Rate Swaps*) und **Währungsswaps** (engl. *(Cross) Currency Swaps*). In der Folge ist die Funktionsweise von Swaps erklärt.

- **Zinsswaps**: zwei Vertragsparteien tauschen Zinszahlungen unterschiedlicher Schuldtitel der gleichen Währung (z.B. EUR) aus. Meist ist (a) ein Schuldtitel variabel verzinst (z.B. LIBOR oder EURIBOR plus Aufschlag) und (b) ein Schuldtitel fix verzinst (z.B. 6% p.a.). Dabei können die Zinsberechnungsmethoden beider Schuldtitel unterschiedlich sein. Eine typische Anwendung ist in nachfolgendem Beispiel erklärt.
- **Währungsswap**: zwei Vertragsparteien tauschen Zinszahlungen und u.U. Kapitalzahlungen aus Schuldtiteln in zwei unterschiedlichen Währungen aus (z.B. EUR gegen USD). Eine Einsatzmöglichkeit könnte der regelmäßige Tausch von EUR gegen USD sein, wenn ein US Unternehmen in der Zukunft Produkte im Euromarkt verkauft und den Wechselkurs zurück zum US\$ bereits fixieren möchte. Auch bei Fremdwährungskrediten werden explizit oder implizit Währungsswaps eingesetzt.



**80** Eine Immobilieninvestorin finanziert den Kauf einer gewerblichen Liegenschaft mit einem Kredit i.H.v. €50.000.000. Der Kredit ist variabel (EURIBOR) verzinst, mit einem Aufschlag von 2% (jährliche Verzinsung zum Jahresende). Da sie über ein relativ stabiles Einkommen über die Mietverträge verfügt, entschließt sich die Investorin, einen Zinsswap einzugehen, sodass sich nicht nur die Mieteinkünfte, sondern auch die Zinsausgaben über die Laufzeit des Kredits nicht wesentlich verändern. Der Swap-Partner bietet einen Fixed-for-floating Swapsatz von 4% an. Erkläre die Zahlungsströme, wenn der EURIBOR für ein Zinsjahr bei 6% steht, und die Zahlungen aller beteiligten Parteien über einen 'zentralen' *Payment Agent* abgewickelt werden.

**Lösung:** Der Kreditnehmer bezahlt stets den Swapsatz von 4% *plus* 2% Zinsaufschlag an den Payment Agent. Bezogen auf die Kreditsumme von €50 Mio. sind das €3 Mio. Die 4% gehen an den Swap-Partner, der im Gegenzug den aktuellen variablen EURIBOR-Zinssatz bezahlt, also 6%. Netto gehen somit  $6\% - 4\% = 2\%$  vom Swap-Partner (hier: Fixed-for-floating Interest-Rate Swap Counterparty) an den Payment Agent. Die Bank erhält die Kreditzinsen in der Höhe von EURIBOR *plus* 2% vom Payment Agent - was genau die Summe der Zahlungen von Kreditnehmer und Swap-Partner entspricht. Das ist in der folgenden Grafik dargestellt.



Wie würden die Zahlungen fließen, wenn der EURIBOR-Satz aktuell nur bei 2% stünde (Tipp:

der Swap-Partner erhält nun 2%)?

**Wertschwankungen von Swaps.** Zu beachten ist, dass sich der Wert eines Swaps mit der Zeit wesentlich verändern kann. Jemand, der einen 10-jährigen, variabel verzinsten (EURIBOR) Kredit ab Ende 2006 bedienen musste, konnte einen Swap eingehen, und den variablen Zinssatz gegen einen fixen Zinssatz von ca. 4,2% tauschen (Fixed-for-floating Swap). Damit war man gegen allfällige EURIBOR-Zinsanstiege abgesichert, gleichzeitig würde man aber auch nicht von EURIBOR-Zinssenkungen profitieren. Durch das Eintreten der Finanzkrise in den Jahren 2007/08, sind EUR-Zinssätze allgemein gesunken. So hätte man Ende 2009, als der ursprüngliche Kredit noch eine Laufzeit von 7 Jahren vor sich hatte, den variablen EURIBOR-Zinssatz gegen einen Fixsatz von nur mehr 3,1% tauschen können (gesunkene Zinserwartungen; mit Anfang Mai 2014 ist der 7-jährige 'Swap-satz' noch niedriger bei ca. 1,3%). Damit war der ursprüngliche und vertraglich fixierte Zinssatz von 4,2% zum Jahresende 2014 aus Marktsicht höher als der nunmehr am Markt neu fixierbare Satz von 3,1%. Bei einer Kredit- bzw. Swapsomme von €1.000.000 bedeutete das zum Jahresende 2009, dass die zukünftigen Zahlungen (d.h. über die restlichen 7 Jahre) an die Swap-Vertragspartnerin nun  $7 \times (4,2\% - 3,1\%) \times 1.000.000 = €77.000$  über dem Marktniveau lagen. Zur Bewertung des Swaps mit Ende 2009 hätte man diese 'überhöhten' Zahlungen abzinsen müssen, sodass der Swap damals wesentlich *negativ* bewertet worden wäre. Zum einen ist anzumerken, dass der Kreditnehmer den Swap ja zur Fixierung der Kreditzinsen eingegangen war, und die primäre Betrachtung daher nicht auf der Marktwertveränderung des Swaps gelegen ist. Zusätzlich sollte man bedenken, dass das Zinsniveau ausgehend von Ende 2006 noch wesentlich hätte steigen können, in welchem Fall der Swap eine wichtige Absicherung gegen steigende Zinszahlungen hätte sein können. Wie sinnvoll es ist, Swaps einzusetzen, sollte daher auf die Bedürfnisse und das Risikoprofil des einzelnen Kunden abgestimmt werden.

## 4.2 Ausgewählte Versicherungsprodukte

**LI 102** **Versicherungsprodukte:** *Gib eine Übersicht über die Individual- und Sozialversicherung. Welche Produkte können diesen beiden Versicherungsklassen zugeordnet werden?*

Im Versicherungsgeschäft unterscheiden wir im Wesentlichen die

- **Individualversicherung:** beruht auf einem privatrechtlichen Vertrag zwischen dem Versicherer und dem Versicherten. Der Versicherte zahlt dabei eine **risikoabhängige Versicherungsprämie** und kann beim Eintritt eines versicherten Ereignisses eine definierte **Versicherungsleistung** beanspruchen. Als Versicherer kann ein Versicherungsverein auf Gegenseitigkeit (engl. *Mutual Insurance*), eine private Versicherungsgesellschaft oder eine öffentliche Versicherungsanstalt (auch mit einer Gebietskrankenkassa kann ein privatrechtlicher Vertrag abgeschlossen werden) auftreten. Namen von Versicherern, welche "Wechselseitige" beinhalten, deuten auf das Gegenseitigkeitsprinzip hin.
- **Sozialversicherung:** beruht auf einer gesetzlichen Grundlage. Die Versicherung wird dabei mit dem Vorliegen bestimmter Umstände wirksam, wie unselbstständiger Arbeit (und der damit verbundenen Meldung bei der Krankenkasse), Ausbildung, Ruhestand oder anderer geschützter Umständen. Bei nichtselbstständig Erwerbstätigen wird die **einkommensabhängige** Prämie meist direkt bei der Gehaltsverrechnung in Form von Dienstnehmer- und Dienstgeberbeiträgen

eingehoben. Während ein privater Versicherer grundsätzlich einzelne Versicherungswerber abweisen kann (außer dies ist gesetzlich untersagt, wie in der Schweiz; Stand 2014), kann eine Sozialversicherung sicherstellen, dass grundsätzlich alle Individuen im Wirkungsbereich Versicherungsschutz genießen können. Besonders in der Krankenversicherung kann dies maßgeblich sein, da sonst Individuen höheren Alters oder mit einem höheren Risiko für Krankheiten (z.B. das Wiederauftreten einer Erkrankung) hohe bis nicht leistbare Beiträge zahlen müssten. Bei der Sozialversicherung steht der **Ausgleich über das Kollektiv** im Vordergrund.

Die *Individualversicherung* umfasst Produkte wie die Schadenversicherung, die Unfallversicherung, die Lebensversicherung, die private Krankenversicherung, die Rechtsschutzversicherung, die Haftpflichtversicherung, die Rückversicherung (z.B. ein Versicherer versichert sich gegen außerordentlich hohe Forderungen von Seiten der Versicherten in einer Periode) oder die betriebliche Kranken- bzw. Pensionsversicherung. In Tabelle 4.1 sind die größten Versicherer in Österreich nach verrechnetem Prämienvolumen aufgelistet. Insgesamt war im Jahr 2012 der Schaden-/Unfallsektor mit ca. 56% des Gesamtmarkt-Prämienvolumens von €18,7 Mrd. am größten. Wir sehen, dass der Lebensversicherungssektor zwischen 2008 und 2012 an Volumen verloren hat (z.T. als Folge der Finanzkrise), während die Bereiche Kranken und Schaden/Unfall leicht angestiegen sind. Zum Krankensektor ist anzumerken, dass ein Großteil des Krankenversicherungsschutzes in Österreich über die Sozialversicherung gegeben ist.

Die *Sozialversicherung* umfasst oft Produkte wie die gesetzliche Krankenversicherung, die gesetzliche Pensionsversicherung, die Versicherung gegen Arbeitslosigkeit, die gesetzliche Unfallversicherung oder die gesetzliche Pflegeversicherung. Dabei ist die Organisation des Sozialversicherungssektors von Staat zu Staat unterschiedlich geregelt.

		Leben	Kranken	Schaden/Unfall	Gesamt
1	UNIQA Österreich Vers.AG	354,8	835,4	1.164,6	2.354,8
2	WIENER STÄDTISCHE Versicherung	809,0	343,2	1.101,4	2.253,5
3	GENERALI	687,7	237,2	1.301,6	2.226,5
4	DONAU	250,6	4,4	770,9	1.025,8
5	Allianz Sach	–	53,2	885	938,2
6	VIG VIENNA INSURANCE GROUP AG	–	–	898,3	898,3
7	SPARKASSEN	819,3	–	24,4	843,7
8	Generali Holding Vienna AG	–	–	721,9	721,9
9	RAIFFEISEN	453,9	–	134,1	588,0
10	ZÜRICH	142,3	–	425,7	568,0
12	GRAWE	121,4	–	353,3	474,7
18	MERKUR	48,7	270,0	51,9	370,5
	<b>Summe Österreich 2012</b>	<b>6.452,2</b>	<b>1.761,6</b>	<b>10.472,5</b>	<b>18.686,4</b>
	Summe Österreich 2008	7.316,5	1.542,5	9.199,6	18.058,6
	Summe Österreich 2004	6.121,7	1.353,8	8.390,6	15.866,0

**Tabelle 4.1:** Größte österreichische Individualversicherer nach verrechneten Prämien 2012 in €Mio. (inkl. Rückversicherungsanteil; Datenquelle: [www.fma.gv.at](http://www.fma.gv.at)).

**LI 103** **Versicherungsvertrag:** *Wo sind Versicherungsverträge rechtlich geregelt? Welche Elemente sind in einem Versicherungsvertrag standardmäßig enthalten?*

Ein **Versicherungsvertrag** (auch: eine *Polizze*) ist grundsätzlich ein privatrechtlicher Vertrag zwi-

schen (a) einem Versicherungsunternehmen und (b) einem Versicherungskäufer. Das Versicherungsunternehmen verpflichtet sich gegen den Erhalt einer **Versicherungsprämie** (einmal oder regelmäßig) beim Eintritt von vertraglich definierten **Ereignissen** (engl. *insured event*) eine **Versicherungsleistung** zu erbringen. Der Eintritt des Schadensereignisses ist dabei im Voraus ungewiss. Die Versicherungsleistung kann (a) fixiert (z.B. bei der sogenannten **Summenversicherung**) oder (b) variabel (z.B. bei der klassischen Schadenversicherung) sein.

Versicherungsverträge sind (mit Ausnahme des Sozialversicherungsschutzes) privatrechtliche Verträge. Damit kommt das ABGB zur Anwendung; ebenso sind Vorschriften im Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG) und Versicherungsvertragsgesetz (VersVG) enthalten. Weiters werden Musterbedingungen ([www.vvo.at/personenversicherung](http://www.vvo.at/personenversicherung)) vom Verband der Versicherungsunternehmen Österreichs herausgegeben, die aktuell jedoch nicht bindend sind.

Die Definition (a) des versicherten Ereignisses (Umfang) und (b) der Versicherungsleistung (Umfang und Höhe) wird in der Folge direkt bei den einzelnen Produkten besprochen.

#### 4.2.1 Schaden- und Unfallversicherung

**LI 104** **Schadenversicherung:** *Erkläre den Begriff Schadenversicherung. Was sind die Spezifika dieses Versicherungsbereichs? Welche Arten von Schadenversicherung gibt es?*

Die **Schadenversicherung** umfasst all jene Versicherungszweige, für die einer Versicherungsleistung der Eintritt eines definierten Schadenereignisses vorausgeht. Dabei ist der Versicherte (a) einer direkten Wertminderung seines aktuellen Vermögens (z.B. Wertverlust eines Hauses durch einen Brand, Diebstahl von Schmuck, Minderung des Wertes eines Autos bei einem Unfall) oder (b) einem bevorstehenden Verlust durch Forderungen Dritter (z.B. Beschädigung eines fremden Autos bei einem Unfall, Schädigung eines Unternehmens durch fahrlässige Handlungen eines Direktors etc.) ausgesetzt.

Wesentlich bei der Schadenversicherung ist das **Prinzip des Bedarfsdeckung**, d.h. die Höhe der Leistung der Versicherung orientiert sich an der konkreten Schadenshöhe (z.B. Reparaturkosten, Wiederbeschaffungskosten). Im Gegensatz dazu steht die *Summenversicherung*, welche die Zahlung einer fixen Summe beim Eintritt des versicherten Ereignisses vorsieht.

Konkret fallen **Sachversicherungen** in die Kategorie der Schadenversicherung; so z.B. die Feuerversicherung, Gebäudeversicherung, Hausratversicherung, Industrieversicherung, Transportversicherung, Kreditversicherung, Kfz-Kaskoversicherung oder Privathaftpflichtversicherung. Auch die Haftpflichtversicherungen spezieller Berufsgruppen (Anwälte, Ärzte, Wirtschaftsprüfer etc.) oder die Rechtsschutzversicherung zählen zur Schadenversicherung. Die Unfallversicherung ist eng mit der Schadenversicherung verwandt (Eintritt eines Schadenereignisses), wird jedoch meist separat behandelt, da es sich bei der Versicherungsleistung z.T. um eine vorab definierte Summe handelt.



**81** Der Verband der Versicherungsunternehmen (VVO) stellt auch im Sachversicherungsbereich umfangreiche Musterbedingungen zur Verfügung (vgl. <http://www.vvo.at/sachversicherung/>). Recherchiere (a) welche Sachen, (b) welche Gefahren im Sachen-Teil der *Haushaltsversicherung* (nach Vorschlag VVO) grundsätzlich

abgedeckt sind, und (c) wie die örtliche Geltung der Versicherung definiert ist.

**Lösung:** Versicherte Sachen (a) umfassen den Wohnungsinhalt (Eigentum der Familie des Versicherten und fremder Personen (ausgenommen (Unter-)Mieter)), besonders Geld, Schmuck, wertvolle Sammlungen, Heizungsanlagen, Armaturen, bewegliche private Gebrauchs- bzw. Verbrauchsgüter und Antennenanlagen (auch im Freien). Nicht versichert sind Kraftfahrzeuge, Handelswaren, Geschäftsgelder und Glasdächer/Abdeckungen. Die versicherten Gefahren (b) beinhalten Brand, Blitzschlag, Explosion, Flugzeugabsturz, Sturm, Hagel, Schneedruck, Steinschlag, Erdbeben, Leitungswasser, Einbruchsdiebstahl und Glasbruch. Explizit nicht versichert sind Lawinen, Hochwasser, Holzfäule, Vermorschung, Vandalismus durch Mitbewohner. Örtlich gilt der Versicherungsschutz für die in der Police beschriebenen Räumlichkeiten. In Mehrparteienhäusern gilt der Versicherungsschutz auch in genutzten Kellerabteilen, Dachböden, Außenanlagen oder Gemeinschaftsräumen - allerdings dann nur in reduziertem Ausmaß. Ist man mit der Konstruktion von Versicherungsverträgen nicht im Detail vertraut, ist es auf jeden Fall interessant, die Allgemeinen Bedingungen für die Haushaltsversicherung der VVÖ einmal durchzublättern.

**LI 105** **Prämien:** In welche Elemente kann man Prämien aufspalten? Was ist primäre bzw. sekundäre Prämien-differenzierung? Erkläre, was der Risikozuschlag ist. Nenne Beispiele für Prämienprinzipien.

Der Versicherer übernimmt die Zahlung einer Leistung  $S$  (Zufallsvariable, da der Schaden im Voraus nicht bekannt ist) im Schadensfall gegen die Zahlung einer Prämie  $P(S)$  durch den Versicherungsnehmer. Der Ausdruck  $P(S)$  signalisiert, dass die Prämie eine Funktion des übernommenen Risikos  $S$  ist. Betriebswirtschaftlich muss die einzelne Prämie  $P(S)$  beispielsweise auch einen Beitrag zu den Verwaltungs- und Vertriebskosten des Versicherungsunternehmens beinhalten. Didaktisch kann man die Prämie nun in verschiedene Komponenten aufspalten. Dazu gehen wir von der erwarteten Höhe der Versicherungsleistung  $\mathbb{E}[S]$  aus, die auch **reine Risikoprämie** (engl. *fair premium*) genannt wird:

	Reine Risikoprämie $\mathbb{E}[S]$
+	Risikozuschlag
+	Verwaltungs- und Betriebskostenzuschlag
-	Zinsen (Zeitdifferenz: Prämien- vs. Leistungszahlung)
+	Gewinnzuschlag
+	Steuern, vom Staat verordnete Gebühren/Beiträge
=	Prämie $P(S)$ (von Versicherungsnehmer zu bezahlen)

Der *Risikozuschlag* dient als Puffer, um die Differenz zwischen dem tatsächlichen Schaden und dem erwarteten Schaden (gerechnet über das gesamte Versicherungsportfolio des Versicherers) aufzufangen. *Verwaltungs- und Betriebskosten* ergeben sich aus dem Vertrieb, dem Schadensmanagement und dem sonstigen Versicherungsbetrieb. Schließlich erwarten die Kapitalgeberinnen (z.B. Aktionärinnen) des Versicherungsunternehmens einen *Ertrag* auf ihr eingesetztes Kapital, sodass noch ein *Gewinnzuschlag* eingepreist werden muss.

Kosten fallen zum Teil auf Unternehmensebene an und müssen per Formel in die Prämien einzelner Versicherungsverträge eingepreist werden. Die Kostenumlegung kann in Bezug auf die 'Größe' des versicherten Schadens  $S$  erfolgen. In Bezug auf **Prämienprinzipien** spricht man von einem **Erwar-**

**Erwartungswertprinzip**, wenn man die Prämie  $P(S)$  eines potenziellen Schadens  $S$  als

$$P(S) = \mathbb{E}[S] \cdot (1 + \theta_1), \quad (4.4)$$

also mittels Aufschlag (engl. *loading factor*) auf die reine Risikoprämie, berechnet (für  $\theta_1 > 0$ ). Alternativ könnte man auch Kosten in Bezug auf ein Risikomaß allokkieren: ein Beispiel ist das **Standardabweichungsprinzip**, dass die Prämie als

$$P(S) = \mathbb{E}[S] + \theta_2 \cdot \sqrt{\text{Var}[S]} \quad (4.5)$$

berechnet (für  $\theta_2 > 0$ ). Hier ist der Aufschlag für jene Versicherungsverträge relativ höher, für die eine höhere Abweichung vom erwarteten Schaden  $\mathbb{E}[S]$  erwartet wird. Es könnten auch beide Prinzipien kombiniert werden: das Risikokapital wird mittels Standardabweichungsprinzip allokkert und alle anderen Kosten mittels einem proportionalen Aufschlag gemäß dem Erwartungswertprinzip.



**82** Für Interessierte: eine Versicherung verfügt über ein Portfolio bestehend aus 1.000 ähnlichen (und voneinander unabhängigen) Versicherungsverträgen. Bei 400 der Versicherungen tritt je ein Schaden von 10 mit einer Wahrscheinlichkeit von  $q_A = 0,05$  ein (Klasse A). Bei den restlichen 600 Verträgen tritt je ein Schaden von 20 mit Wahrscheinlichkeit  $q_B = 0,1$  ein (Klasse B). Zusätzlich zur reinen Risikoprämie müssen Kosten von 500, die auf Unternehmensebene anfallen (für unerwartete Schadensrückstellungen, Betriebskosten und Steuern/Kapitalverzinsung), allokkert werden. Wie hoch sind die Prämien  $P(S_A)$  und  $P(S_B)$  der beiden Klassen nach (a) dem Erwartungswertprinzip und (b) dem Standardabweichungsprinzip?

**Lösung:** Wir berechnen den Erwartungswert und die Standardabweichung eines Vertrags in Klasse A als

$$\mathbb{E}[S_A] = 10 \cdot 0,05 + 0 \cdot 0,95 = 0,5 \quad \sqrt{\text{Var}[S_A]} = \sqrt{9,5^2 \cdot 0,05 + (-0,5)^2 \cdot 0,95} = 2,18$$

und in Klasse B als

$$\mathbb{E}[S_B] = 20 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,9 = 2 \quad \sqrt{\text{Var}[S_B]} = \sqrt{18^2 \cdot 0,1 + (-2)^2 \cdot 0,9} = 6.$$

Nach dem Erwartungswertprinzip muss somit

$$500 + 400 \cdot 0,5 + 600 \cdot 2 = 1.900 = (1 + \theta_1) \cdot (400 \cdot 0,5 + 600 \cdot 2)$$

gelten und somit  $\theta_1 = 0,357$  und  $P(S_A) = 0,5 \cdot 1,357 = 0,68$  und  $P(S_B) = 2 \cdot 1,357 = 2,71$ . Analog ergibt sich nach dem Standardabweichungsprinzip

$$1.900 = (400 \cdot 0,5 + 600 \cdot 2) + \theta_2 \cdot 400 \cdot 2,18 + \theta_2 \cdot 600 \cdot 6,$$

woraus man  $\theta_2 = 0,112$  errechnet, sodass  $P(S_A) = 0,5 + 0,112 \cdot 2,18 = 0,74$  und  $P(S_B) = 2 + 0,112 \cdot 6 = 2,67$ .

**LI 106** **Selbstbehalt:** Warum sehen Versicherungen Selbstbehalte/Franchisen in ihren Schadenversicherungsverträgen vor?

Deckt der Versicherer den gesamten entstandenen Schaden in der Form einer Schadensleistung ab, so

hat dies zur Auswirkung, dass der Versicherungsnehmer vielleicht weniger sorgsam sein Hab und Gut behütet, aggressiver mit dem Auto fährt oder keinen Feuerlöscher kauft und somit einen entstehenden Brand nicht rechtzeitig löschen kann. Diese Situationen stellen Interessenskonflikte (engl. *conflicts of interest*) dar: der Versicherungsnehmer möchte möglichst wenig Aufwand in seinem täglichen Leben auf sich nehmen, um einem Schadensfall vorzubeugen, während der Versicherer Schadensfälle und somit Versicherungsleistungen vermeiden möchte. Abhilfe kann ein **Selbstbehalt** schaffen.<sup>10</sup> Im Schadensfall muss der Versicherte (a) entweder die ersten z.B. €1.000 pro Jahr oder jedes Schadens oder (b) einen Prozentsatz des jeweiligen Schadens (was im Personenversicherungsbereich aber eher unüblich ist) selbst tragen. Dies kann dazu führen, dass der Kunde einem Schadensfall vorbeugt und dieser gar nicht erst auftritt. Tritt ein Schaden auf, so versucht der Kunde u.U. die entstehenden Kosten gering zu halten (z.B. Auswahl einer billigen Reparaturwerkstatt).

Ein zusätzlicher Effekt des absoluten Selbstbehaltes ist es, dass kleine Schäden, welche den Selbstbehalt nicht übersteigen, nicht an die Versicherung gemeldet werden, und so den Verwaltungsaufwand in der Schadensabwicklung wesentlich reduzieren können.

Bietet ein Versicherer Versicherungsverträge mit unterschiedlich hohen Selbstbehalten an (z.B. in der Krankenversicherung), so hat die Auswahl eines hohen Selbstbehaltes noch zusätzlich ein Signalwirkung: die Kundin schätzt ihr eigenes Risiko gering ein und ist deshalb bereit, einen höheren Selbstbehalt auf sich zu nehmen. Da die Kundin mehr als der Versicherer über sich selbst weiß, sind die Risikoaufschläge des Versicherers in solchen hohen Selbstbehaltsklassen aufgrund dieser Signalwirkung oft geringer als für Verträge mit niedrigem Selbstbehalt.

**LI 107** **Unfallversicherung:** *Erkläre den Begriff 'private Unfallversicherung'. Warum ist die private Unfallversicherung praktisch relevant? Was fällt unter den Begriff des Unfalls? Welche Leistungen können erbracht werden?*

Die gesetzliche Unfallversicherung (für unselbstständige und z.T. selbstständig Arbeitende) deckt nur Unfälle während der beruflichen Tätigkeit und auf dem direkten Weg zu oder von der Arbeit ab. Mit zunehmenden Sport-, Reise- und anderen Freizeitaktivitäten wird in Österreich auch eine hohe Anzahl an Unfällen im nicht-beruflichen Bereich erfasst. Im Jahr 2011 wurden über 800.000 Unfälle verzeichnet (vgl. Beispiel 83), wobei sich etwa drei Viertel davon im Heim-, Freizeit- und Sportbereich ereignet haben. Das unterstreicht die Relevanz einer privaten Unfallversicherung.



**83** Recherchiere auf [www.kfv.at/unfallstatistik/](http://www.kfv.at/unfallstatistik/) Unfallstatistiken mit Bezug auf Österreich. Finde heraus, wieviele versicherte Unfälle sich im Jahr 2011 in Österreich ereignet haben. Wieviel Prozent davon haben sich (a) im Verkehr, (b) in Arbeit und Schule und (c) im Heim bzw. bei Sport- und Freizeitaktivitäten ereignet?

**Lösung:** Unter der genannten Datenquelle finden wir explizit Unfalldaten für Österreich im Jahr 2011. Mit 74% machen Unfälle im Heim bzw. bei Sport- und Freizeitaktivitäten den größten Teil aus.

<sup>10</sup>Der Sprachgebrauch zu Selbstbehalt bzw. Franchise variiert zum Teil. Manchmal werden die ersten €*x*, die der Kunde pro Kalenderjahr selbst zu tragen hat, als **Franchise** bezeichnet, während der Selbstbehalt eine prozentuale Beteiligung an entstehenden Kosten darstellt (u.U. bis zu einer Deckelung). Manchmal werden die beiden Begriffe auch als Synonyme verwendet.



	Anzahl				Prozent (%)		
	(I) Verkehr	(II) Arbeit, Schule	(III) Heim, Freizeit, Sport	Gesamt	(I)	(II)	(III)
Getötete	523	149	1.783	2.455	21	6	73
Verletzte:	1.591	1.105	5.861	8.557	19	13	68
bleibende Behinderung							
Verletzte:	11.143	13.515	138.598	163.256	7	8	85
stationäre Behandlung							
<b>Verunglückte ges.</b>	45.548	165.677	601.800	813.000	6	20	74

Unfallversicherungsverträge sind besonders auf das ABGB (Vertragsrecht), das Versicherungsvertragsgesetz (VersVG) und die vom Versicherungsverband erarbeiteten (aber unverbindlichen) Musterbedingungen für die Unfallversicherung (AUVB 2008, vgl. [www.vvo.at/personenversicherung](http://www.vvo.at/personenversicherung)) gestützt.

In Artikel 6 AUVB 2008 ist definiert: "Ein Unfall liegt vor, wenn die versicherte Person durch ein (1) plötzlich (2) von außen auf ihren Körper wirkendes Ereignis (Unfallereignis) (3) unfreiwillig eine (4) Gesundheitsschädigung erleidet." Krankheiten und übertragbare Krankheiten gelten generell nicht als Unfall bzw. Unfallfolgen (Ausnahmen: FSME, Kinderlähmung, Wundstarrkrampf, Tollwut). Als Versicherungsleistungen können eine Übernahme der Unfallkosten, das Tag- bzw. Spitalsgeld, Rentenzahlungen bei dauernder Invalidität von mindestens x%<sup>11</sup>, Zahlungen im Todesfall oder andere Zusatzleistungen vorgesehen sein.

Unfallversicherungen können in der Regel als **Einzelversicherung**, **Familienversicherung** oder **Kollektivversicherung** (für z.B. Mitarbeiter eines Unternehmens, Schüler einer Schule oder Mitglieder eines Vereins) abgeschlossen werden. Für die Versicherung wird typischerweise eine **Versicherungssumme definiert**, bei mehreren und unabhängigen Unfällen kann diese Summe als Leistung überschritten werden.

**LI 108**    **Gesetzliche vs. private Unfallversicherung:** *Beschreibe die strukturellen Unterschiede zwischen (a) der gesetzlichen und (b) der privaten Unfallversicherung in Österreich.*

Die gesetzliche Unfallversicherung (UV) unterscheidet sich von der privaten in den folgenden Punkten. Dabei ist jeweils der Sachverhalt bezüglich der gesetzlichen Unfallversicherung (über die Sozialversicherung) bzw. die private Unfallversicherung mit einem '(G)' bzw. '(P)' markiert.

- *Entstehung des Versicherungsverhältnisses:* (G) durch Gesetz geregelt, (P) durch vertragliche Vereinbarung.
- *Bemessung der Prämie:* (G) einkommensabhängig, (P) risikoabhängig.
- *Umfang des Versicherungsschutzes:* (G) Arbeitsunfälle, Wegunfälle (von und zur Arbeit), Berufskrankheiten, (P) Unfälle gem. Vereinbarung (beruflich und außerberuflich).
- *Örtlicher Geltungsbereich:* (G) Ort der Arbeitsausübung und (direkter) Weg von der und zur Arbeit, (P) weltweit.

<sup>11</sup>Das AUVB 2008 schlägt u.a. die folgenden Invaliditätsgrade vor: Sehkraftverlust beider Augen - 100%, Verlust eines Armes oder Beines - 70%, Gehörverlust beider Ohren - 60%, Verlust eines Daumens - 20% etc.

- *Zeitlicher Geltungsbereich:* (G) Arbeitszeit sowie Zeiten am Weg zur und von der Arbeit, (P) ganztägig.
- *Versicherungsleistung bei Todesfall:* (G) Rentenleistung an Hinterbliebene bei Unfalltod (gem. Bemessungsgrundlage), (P) generell Kapitalleistung bei Unfalltod bzw. dauernder Invalidität.
- *Höhe der Versicherungsleistung:* (G) Freiwillige Höherversicherung nicht vorgesehen, (P) Vertraglich frei wählbare Versicherungssumme.
- *Leistung bei Minderung der Erwerbsfähigkeit:* (G) Rentenleistung bei  $\geq 20\%$  Erwerbsfähigkeitsminderung und Vorliegen während  $\geq 3$  Monaten, (P) Leistung gemäß Vertrag und ohne sonstige Mindestanforderung an Invaliditätsgrad.
- *Laufende Überprüfung der Erwerbsfähigkeit:* (G) laufend, Rentenzahlungen können gekürzt oder gestoppt werden, (P) Kapitalleistung aufgrund der vertraglich festgesetzten Auszahlungssätze und Versicherungssumme, danach keine weitere Überprüfung.

#### 4.2.2 Lebens- und Krankenversicherung

**LI 109** **Lebensversicherung:** Erkläre den Begriff der Lebensversicherung. Erkläre u.a. die Ablebensversicherung, Erlebensversicherung, gemischte Versicherung und die gleichzeitige Versicherung auf mehrere Leben.

Die **Lebensversicherung** ist eine Individualversicherung, wobei Gefahren, die direkt mit dem menschlichen Leben zusammenhängen, versichert werden. Speziell kann eine Versicherungsleistung vereinbart werden, (a) wenn der Tod während einer bestimmten Zeit eintritt (**Ablebens-** bzw. **Todesfallversicherung**), (b) wenn ein definierter Zeitpunkt erlebt wird (**Erlebensversicherung**), oder (c) wenn durch schwere Krankheiten oder sonstige Ursachen eine Berufs- bzw. Erwerbsunfähigkeit eintritt. Die private Rentenversicherung wird somit auch zur Lebensversicherung gezählt.

Die Lebensversicherung wird generell als *Summenversicherung* abgeschlossen, sodass im Er- bzw. Ablebensfall eine vertraglich vereinbarte Summe ausbezahlt wird. Diese kann über die Zeit fixiert sein oder schwanken (z.B. als Beteiligung an einem Investmentfonds). Die Leistung erfolgt entweder als (a) (meist einmalige) Kapitalleistung oder (b) periodische Auszahlung (Rente, Taggeld). Als Zweck der Lebensversicherung ist (a) eine Risikoabdeckung und (b) die Kapitalbildung (Sparen) zu sehen. Speziell steht beim Abschluss einer Lebensversicherung oft die Vorsorge für die Familie im Ablebensfall, die Altersvorsorge, ein planmäßiges Sparen, die Vorsorge für den Invaliditätsfall, oder auch eine Steuerersparnis (Lebensprodukte sind oft steuerlich begünstigt) im Vordergrund. Wie bei anderen Versicherungsprodukten, kann die Lebensversicherung (a) als Einzelversicherung oder (b) als Versicherung einer Gruppe (z.B. Ehepaar) abgeschlossen werden.

Wir erklären nun ausgewählte Lebensversicherungstypen näher.<sup>12</sup>

- **Ablebensversicherung:** die Versicherungssumme wird fällig, wenn der Versicherte innerhalb des definierten Versicherungszeitraums stirbt. Die Vertragsdauer kann begrenzt oder unbegrenzt sein. Die Versicherung wird oft mit dem Ziel des finanziellen Schutzes von Hinterbliebenen oder der Schuldentilgung (z.B. beim Kauf einer Wohnung auf Kredit) im Ablebensfall abgeschlossen.

<sup>12</sup>Wieder sind unter [www.vvo.at/personenversicherung/](http://www.vvo.at/personenversicherung/) Musterbedingungen für die unterschiedlichen Versicherungsformen zu finden.

- **Erlebensversicherung:** die Versicherungssumme wird fällig, wenn die Versicherte einen definierten Zeitpunkt erlebt (z.B. Pensionsantrittsalter). Die Dauer der Versicherung ist somit grundsätzlich begrenzt. Die allfällige Leistung kann sich auf Basis eines Index oder mehrerer Indizes errechnen (z.B. Wertsteigerung eines Investmentportfolios, Inflationsindex). Die Versicherung wird meist mit dem Ziel der Altersvorsorge abgeschlossen.
- **Gemischte Versicherung:** die Versicherungssumme wird zum (a) Ableben des Versicherten (Ablebenselement) oder aber (b) spätestens zum Ende eines definierten Zeitraums (Erlebenselement) fällig. Auch hier ist die Dauer von Natur aus begrenzt. Die Versicherung wird oft als kombinierte Alters- und Hinterbliebenenvorsorge eingesetzt, oder etwa als Ausbildungs- oder Aussteuerversicherung.
- **Ablebensversicherung auf mehrere Leben:** der Vertrag sieht mehrere versicherte Personen vor. Die Versicherungssumme wird nur einmal, nämlich beim ersten Ableben einer versicherten Person, fällig. Die Versicherung wird vor allem zum Schutz finanziell voneinander abhängiger Personen (z.B. Ehepartner, Geschäftspartner, Lebensgemeinschaften) erworben.

Auch einzelne Elemente der Unfallversicherung können der Lebensversicherung zugerechnet werden.



**84** Recherchiere welchen Anteil der Bereich der Lebensversicherung am gesamten Versicherungsgeschäft hat. Die Publikationen auf [www.swissre.com](http://www.swissre.com) liefern hierzu interessantes Informationsmaterial.

**Lösung:** Wie in Abbildung A.1 in Appendix A.2.1 zu sehen ist, macht der Lebensversicherungssektor einen wesentlichen Teil der gesamten Versicherungswirtschaft aus (gemessen am jährlichen Prämienvolumen). Im Jahr 2012 beliefen sich Prämien aus dem globalen Lebensversicherungsgeschäft auf ca. US\$2.620 Mrd., was ca. 57% des gesamten Versicherungssektors oder 3,7% des globalen Bruttoinlandsprodukts (engl. *world GDP*) entspricht. In Europa entfielen mit ca. US\$876 Mrd. Prämienvolumen im Jahr 2012 auch etwa 57% des gesamten Versicherungsgeschäfts auf den Bereich 'Leben'.

**LI 110** **Risiken in der Lebensversicherung:** Was sind subjektive und objektive Risiken in der klassischen Lebensversicherung? Gib Beispiele an.

Die Lebensversicherung deckt **objektive** und **subjektive Risiken ab**. Zu den *objektiven* Risiken gehören:

- **Lebenserwartung:** diese wird statistisch über die Bevölkerung (oder Untergruppen) und getrennt nach Geschlecht in sogenannten **Sterbetafeln** erfasst. Die Lebenserwartung kann z.B. wesentlich von der Ernährungsversorgung, den Hygienebedingungen oder der Krankenversorgung innerhalb einer Bevölkerungsgruppe abhängen.
- **Invalidität oder Ableben durch Unfälle:** ist in den Sterbetafeln eingerechnet. Speziell untersucht man Unfälle (a) im Beruf, (b) im Verkehr und (c) im Heim und in der Freizeit (vgl. Beispiel 83).

Zusätzlich werden *subjektive Risiken* versichert, die der Versicherungsnehmer zum Teil selbst beeinflussen kann. Dazu zählen wirtschaftliche Verhältnisse, individuelle Ernährung, körperliche Aktivität, Suchtmittelkonsum oder das Verhalten im Krankheitsfall.

**LI 111** **Sterbetafel:** Was ist eine Sterbetafel? Welche Informationen sind in einer Sterbetafel typischerweise enthalten?

Eine **Sterbetafel** (engl. *Life Table*) ist eine Tabelle von Wahrscheinlichkeiten, dass eine Person, die einer bestimmten Bevölkerung zufällig entnommen wird (z.B. eine 37-jährige Österreicherin), bedingt auf ihr Alter innerhalb von einem Jahr stirbt. Diese Wahrscheinlichkeiten heißen **einjährige Sterbewahrscheinlichkeiten**. In der Versicherungsmathematik wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein  $x$ -Jähriger innerhalb von einem Jahr stirbt, standardmäßig mit  $q(x)$  oder  $q_x$  bezeichnet. Umgekehrt ist die Wahrscheinlichkeit  $p_x$ , dass ein  $x$ -Jähriger ein Jahr überlebt (mit:  $p_x = 1 - q_x$ ), die sogenannte **einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit**. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein  $x$ -Jähriger noch  $k$  Jahre überlebt und dann im  $k + 1$ -ten Jahr stirbt, ist somit

$${}_k p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \dots \cdot p_{x+k-1} \cdot q_{x+k}.$$

Sterbetafeln werden basierend auf statistischen Methoden aus realen Bevölkerungsdaten berechnet. Dabei verändern sich die Wahrscheinlichkeiten  $q_x$  ständig, da sich auch die Lebenserwartung der Menschen, z.B. aufgrund von medizinischen Erneuerungen, der Änderung der Lebensweise oder einem sich ändernden Risikobewusstsein, laufend ändert. Da sich die Sterbewahrscheinlichkeiten von Männern und Frauen wesentlich unterscheiden, sind Sterbetafeln fast immer separat für männliche und weibliche Individuen verfügbar.

Sterbetafeln umfassen meist noch andere Informationen, die auch mit den Sterbewahrscheinlichkeiten in Verbindung stehen. Details zur Mathematik der Sterbetafeln können in Standardwerken wie Gerber [21] oder Bowers et al. [10] nachgeschlagen werden. Eine österreichische Sterbetafel wird von Statistik Austria veröffentlicht.<sup>13</sup> In Tabelle A.2 in Appendix A.2.2 ist ein Auszug aus dieser Sterbetafel abgebildet.



**85** Verwende Tabelle A.2 im Appendix um die folgenden Wahrscheinlichkeiten zu berechnen: (a) dass eine 30-jährige Frau mindestens noch ein Jahr lebt, (b) dass ein heute 60-jähriger Mann älter als 65 wird und (c) dass eine 70-jährige Frau innerhalb von zwei Jahren stirbt.

**Lösung:** Punkt (a) kann direkt aus der Tabelle als  $p_{30} = 1 - q_{30} = 1 - 0,000283 = 99,97\%$  abgelesen werden. Für (b) müssen wir fünfmal die aufeinanderfolgenden Überlebenswahrscheinlichkeiten miteinander multiplizieren und erhalten so

$${}_5 p_{60} = p_{60} \cdot p_{61} \cdot p_{62} \cdot p_{63} \cdot p_{64} = 94,0\%.$$

Um Punkt (c) zu lösen, müssen wir die Wahrscheinlichkeit als (I) stirbt im ersten Jahr oder (II) überlebt das erste Jahr und stirbt im zweiten Jahr zerlegen, sodass wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit als

$$q_{70} + p_{70} \cdot q_{71} = 2,32\%$$

berechnen. Man beobachtet weiters, dass Männer ab dem 13. Lebensjahr strukturell höhere Sterbenswahrscheinlichkeiten aufweisen als Frauen. Besonders die Vervierfachung der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeit zwischen 14. und 20. Jahren bei Männern wird oft auf die Aufnahme

<sup>13</sup>Siehe [www.statistik.at/Statistiken/Bevölkerung/Sterbetafeln](http://www.statistik.at/Statistiken/Bevölkerung/Sterbetafeln) (Stand 05/2014).

me von risikoreichem Verhalten, etwa durch Risikosportarten oder die Teilnahme am Verkehr, zurückgeführt.

**LI 112** **Prämienberechnung Ablebensversicherung:** Welche Faktoren werden bei der Prämienberechnung in der klassischen Ablebensversicherung meist berücksichtigt? In welche Elemente kann die Prämie für eine Lebensversicherung unterteilt werden?

Die Verträge in der Lebensversicherung laufen meist langfristig, die Prämienzahlung erfolgt dabei (a) einmal zu Beginn der Vertragslaufzeit oder (b) laufend über die Vertragslaufzeit bis zum Eintritt des Versicherungsereignisses. Wir konzentrieren uns auf die Berechnung der Prämie, die einmal zu Beginn der Vertragslaufzeit geleistet wird - das Ergebnis kann man dann in eine periodische Prämienzahlung umrechnen. Da die Versicherungsleistung u.U. weit in der Zukunft liegt, konzentrieren wir uns ähnlich wie bei der Sachversicherung (vgl. LI 105), auf den **erwarteten Barwert der Versicherungsleistung  $S$**  (auch: **Nettoeinmalprämie (NEP)**,  $A_x$ ). Die fixe Versicherungsleistung  $S$  (Summenversicherung) wird dabei zu einem adäquaten Verrechnungssatz  $i$  über die  $K$  Perioden - von der Zahlung bis zurück zum Vertragsbeginn - diskontiert. Wir berechnen daher die Nettoeinmalprämie als

$$A_x = \mathbb{E} \left[ S \cdot \frac{1}{(1+i)^K} \right] = S \cdot \mathbb{E} \left[ \frac{1}{(1+i)^K} \right], \quad (4.6)$$

wobei  $K$  eine Zufallsvariable ist, da zu Vertragsbeginn ja nicht bekannt ist, wann der Versicherte ableben wird.<sup>14</sup> *Eine Frage an Interessierte: wie kann man, nachdem  $i$  festgesetzt wurde, den Erwartungswert berechnen (Tipp: Sterbetafel)?*

Anstatt der offiziellen Sterbetafeln der Statistik Austria können Versicherungen eigene statistische Auswertungen verwenden. Dabei werden verschiedene Sterbetafeln für unterschiedliche Risikogruppen entwickelt, sodass das Risikoprofil der Versicherungsnehmers in der Risikoprämie reflektiert werden kann. Einige Faktoren, die eine Auswirkung auf die (Nettoeinmal-)Prämie einer (Ab-)Lebensversicherung haben, sind:

- **Eintrittsalter** des Versicherten: bei späterem Eintritt erfolgt die Versicherungsleistung wahrscheinlich früher, was zu einer höheren Prämie führt.
- **Geschlecht** des Versicherten: einjährige Sterbewahrscheinlichkeiten sind bei Frauen generell geringer, sodass auch die Versicherungsprämie für Frauen natürlicherweise geringer ist. Geschlechterdifferenzierung in der Prämienbestimmung kann gesetzlich verboten sein, sodass in diesen Fällen ein Unisex-Tarifmodell zum Einsatz kommt.
- **Risikoprofil** und Gesundheitszustand des Versicherten: bei Rauchern sind statistisch v.a. im Bereich 45-60 Jahre höhere Sterbewahrscheinlichkeiten erfasst. Risikogruppen (gefährliche Arbeit, Risikosportarten etc.) sind oft nur teuer versicherbar oder werden von Versicherungen abgelehnt.
- **Laufzeit** des Vertrags: ein unbefristeter Vertrag ist teurer als ein befristeter.
- **Diskontierungssatz:** in Zeiten hoher Zinsen bzw. Kapitalmarktrenditen werden zukünftige Zahlungen stärker diskontiert als wenn Zinsen/Renditen niedrig sind, so ist für einen höheren Diskontierungssatz  $i$  die Prämie geringer.

<sup>14</sup>Genau genommen ist dies die Formel für eine unbestimmt bis Ableben laufende Versicherung. Ist die Versicherungsdauer zeitlich begrenzt, werden entsprechende Bedingungen an  $K$  gesetzt.

- **Auszahlungsmodalität** bzw. Indexierung der Versicherungssumme: eine Indexierung an z.B. den Verbraucherpreisindex erhöht die Prämie, ebenso kann die Modalität der Auszahlung im Versicherungsfall (Einmalzahlung, Teilzahlungen, Rente) eine Auswirkung auf die Prämie haben.

Ähnlich wie in der Schadenversicherung, werden dann Risiko-, Verwaltungs- und Betriebskosten, sowie Gewinnaufschläge auf die Nettoeinmalprämie berechnet, um die vom Kunden zu bezahlende Prämie zu berechnen.



**86** Betrachte eine gemischte Ab- bzw. Erlebensversicherung mit einer Laufzeit von 5 Jahren. Stirbt der Versicherte in einem dieser Jahre, wird am Ende des entsprechenden Jahres die Versicherung ausbezahlt. Spätestens zum Ende des 5. Jahres kommt es zur Auszahlung der Versicherungssumme von €1.000. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherte in einem Jahr stirbt, wenn er bis zum Anfang des Jahres überlebt hat, wird konstant bei 5% angesetzt. Wie hoch ist die *Nettoeinmalprämie* dieser Versicherung, wenn ein Diskontierungssatz von 3% p.a. verwendet wird?

**Lösung:** Wir verwenden Formel (4.6), mit  $K = 1, 2, 3, 4, 5$ , und berechnen die Nettoeinmalprämie dieser Versicherung als

$$\begin{aligned} A_x &= \mathbb{E} \left[ 1.000 \cdot \frac{1}{1,03^K} \right] \\ &= 1.000 \cdot \left( \frac{0,05}{1,03} + \frac{0,95 \cdot 0,05}{1,03^2} + \frac{0,95^2 \cdot 0,05}{1,03^3} + \frac{0,95^3 \cdot 0,05}{1,03^4} + \frac{0,95^4}{1,03^5} \right) \\ &= 896,4. \end{aligned}$$

Dabei ist  $0,95^{k-1} \cdot 0,05$  die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherte  $k - 1$  Jahre überlebt und im  $k$ -ten Jahr stirbt. Im letzten Jahr fällt die Sterbenswahrscheinlichkeit weg, da die Versicherungssumme in jedem Fall ausbezahlt wird. Die Nettoeinmalprämie ist relativ hoch, da (a) die Laufzeit kurz ist, (b) die Wahrscheinlichkeit relativ hoch ist, in frühen Jahren zu sterben und (c) der Diskontierungssatz (3%) niedrig ist.

**LI 113** **Krankenversicherung:** Grenze die Sozialversicherung (Bereich: Krankenversicherung) gegen die private Krankenversicherung ab. Welche Leistungen werden typischerweise von der privaten Krankenversicherung abgedeckt?

Die Sozialversicherung in Österreich, die grundsätzlich auch den Krankenversicherungsschutz inkludiert, deckt für alle Versicherten die gleichen Sachleistungen ('Solidaritätsprinzip': Behandlungskosten, Anstaltspflege, Vorsorge, Heilmittel, Rehabilitation) und beitragsabhängige Geldleistungen (im Fall der Krankenversicherung das Krankengeld) ab. Die Abwicklung dieser Grundversicherung erfolgt über die Gebietskrankenkassen (GKK), Betriebskrankenkassen (z.B. BKK Voest Alpine Bahnsysteme oder BKK Wiener Verkehrsbetriebe) und Versicherungsanstalten des Gewerbes, der Bauern, für Eisenbahn und Bergbau und des öffentlichen Dienstes. Der Versicherungsschutz umfasst Beschäftigte, Arbeitslose und Pensionisten (sowie bestimmte nicht versicherte Angehörige). Für Erwerbstätige wird die Prämie einkommensabhängig eingehoben.

Damit hat es die Sozialversicherung zum Ziel, eine Grundversicherung für einen möglichst großen Teil der Bevölkerung sicherzustellen. Darüber hinaus können einzelne Personen oder Betriebe Interessen haben, die über die Leistungen der Grundversicherung hinausgehen (z.B. höheres Taggeld, außergewöhnliche Leistungen bei stationärer Heilbehandlung ('1./2. Klasse'), zusätzliche Abdeckung

von Arztkosten). Die private Krankenversicherung basiert auf einem privatrechtlichen Vertrag, sodass keine Versicherungspflicht des Versicherers besteht, ebenso orientiert sich die Prämie konkret am übernommenen Risiko (und ist nicht einkommensabhängig). Ein Vertragsabschluss gilt grundsätzlich auf Lebenszeit: der Versicherungsnehmer hat dabei meist ein jährliches Kündigungsrecht, während der Versicherer nur bei versäumter Prämienzahlung oder einem Fehlverhalten des Versicherungsnehmers kündigen kann. Eine Versicherungsleistung wird erbracht, wenn (a) *eine medizinisch notwendige Heilbehandlung* (b) einer *versicherten Person* vorliegt, die aufgrund (c) eines *Unfalls oder einer Krankheit* entstanden ist.

Vor Abschluss eines Vertrags wird in der Regel die **Risikoanalyse** des Kunden durchgeführt. Neben *objektiven* Aspekten (Alter, Gewicht/Größe, Beruf, Familienstand, Wohnort) und *subjektiven* Aspekten (Lebensgewohnheiten, wirtschaftliche Verhältnisse) umfasst diese auch bestehende und vergangene Krankheiten des Kunden. Als Reaktion auf das Ergebnis der Risikoanalyse kann der Versicherer (a) einen Kunden ablehnen, (b) eine höhere Prämie veranschlagen, (c) konkrete Leistungen ausschließen (z.B. Folgebehandlungen einer vergangenen Krankheit) oder (d) die anfängliche Wartezeit, nach welcher der Versicherungsschutz frühestens wirksam wird, ausdehnen. Die Leistungen der *privaten Krankenkasse* (wenn sie als Zusatz zur Sozialversicherung abgeschlossen wird, nicht als Grundversicherung) umfassen meist:

- **Krankenhaustaggeld:** bei einem medizinisch notwendigen, stationären Aufenthalt von mindestens 24 Stunden.
- **Sonderklasseleistungen:** stationärer Aufenthalt in der Sonderklasse (Zwei- bzw. Einbettzimmer), ambulante Operationen, Begleitpersonengeld, Transportkosten, Kur- bzw. Rehabilitationsaufenthalte.
- **Freie Arztwahl:** Privatpatientenstatus.
- **Ambulante Behandlungskosten und Heilmittelkosten:** Arzthonorare, Physiotherapie, Medikamente und Heilbehelfe, medizintechnische Untersuchungen (MR, CT, Laborbefunde).
- **Vorsorgeleistungen:** Vorsorgeuntersuchungen, Wellness, Beiträge zur gesunden Lebensweise.

In Österreich wird der Krankenversicherungsmarkt im Wesentlichen von vier Versicherungsgesellschaften abgedeckt (siehe Abbildung 4.10).

**LI 114** **Prämienanpassung Krankenversicherung:** *Erkläre die Problematik der Prämienanpassung in der Krankenversicherung.*

In der Vergangenheit wurden die Rechnungsgrundlagen für die Prämienbestimmung einer Krankenversicherung meist nachträglich nicht angepasst. Sich ändernde Rechnungsgrundlagen machen eine Prämienanpassung oft wirtschaftlich notwendig:

- Die **Inflation medizinischer Kosten** lag in den letzten Jahren wesentlich über der allgemeinen Preisinflation. Neue Medikamente und Behandlungsmethoden eröffnen neue Möglichkeiten der Behandlung von (z.T. bisher nicht behandelbaren) Krankheiten. Auch die Häufigkeit der Inanspruchnahme medizinischer Behandlungen verändert sich mit der Zeit.
- Das Versicherungsnehmerprofil hat sich verändert: besonders in der **Versorgung älterer Menschen** gibt es wesentlich mehr medizinische (und kostengenerierende) Möglichkeiten als in der

Rang	Gesellschaften 2012	in %
1	UNIQA Österreich Versicherungen AG*)	47,63
2	WIENER STÄDTISCHE Versicherung AG Vienna Insurance Group	19,56
3	Merkur Versicherung AG	14,96
4	Generali Versicherung AG	13,52
5	Allianz Elementar Versicherungs-AG	3,03
6	MuKi Versicherungsverein a.G.	0,75
7	Wüstenrot Versicherungs-AG	0,29
8	Donau Versicherung AG Vienna Insurance Group	0,25
nachrichtlich: Verrechnete Prämien (in Mio. €)		1.754

**Abbildung 4.10:** Anteile am Krankenversicherungsmarkt in Österreich im Jahr 2012 (Quelle: VVO).

Vergangenheit. Auch die Prognose und Lebenserwartung bei kritischen Krankheiten verbessert sich schnell, was wiederum die Behandlungszeiträume ebensolcher Krankheiten oft verlängert.

- Sterblichkeitsverbesserungen verlängern die tatsächliche Versicherungsdauer; besonders in den fortgeschrittenen Lebensjahren fallen statistisch höhere Kosten für den Krankenversicherer an.

Weichen die tatsächlichen Kosten einer Altersgruppe-Geschlecht-Gruppe in einem Jahr wesentlich von den kalkulierten Kosten ab, so ist zu untersuchen, ob dies (a) auf einer stochastischen Schwankung basiert (nicht jedes Jahr sind die Kosten bei gleichen Rahmenbedingungen gleich hoch), oder (b) ob sich eine nachhaltige **Veränderung der Rechnungsgrundlagen** ergeben hat. Gesetzlich ist eine Anpassungsmöglichkeit der Prämie gem. VersVG nur vorgesehen, wenn sich nachweislich eine dauerhafte Veränderung der Lebenserwartung, der Häufigkeit der Inanspruchnahme von Heilmaßnahmen, eine Änderung des vom Sozialversicherer getragenen Kostenanteils nach unten oder sonst eine gesetzliche oder regulatorische Veränderung ergibt, die für den Versicherer zusätzliche (nicht kalkulierte) Kosten verursacht. Im Fall einer Prämienanpassung muss der Versicherer dem Versicherungsnehmer als Alternative zur Prämienhöhung ein Versicherungspaket mit höchstens gleichbleibender Prämie und angepasstem Leistungsumfang anbieten.



**87** Recherchiere, welche Einschränkungen das Versicherungsvertragsgesetz (VersVG) für nachträgliche Änderungen der Prämien im Krankenversicherungsbereich vorsieht. Der Gesetzestext ist auf [www.jusline.at](http://www.jusline.at) abrufbar.

**Lösung:** Der Paragraph §178f beschäftigt sich mit Prämienanpassungen im Krankensegment und definiert das Folgende:

“(1) Eine Vereinbarung, nach der der Versicherer berechtigt ist, die Prämie nach Vertragsabschluss einseitig zu erhöhen oder den Versicherungsschutz einseitig zu ändern, etwa einen Selbstbehalt einzuführen, ist - unbeschadet des § 6 Abs. 1 Z 5 KSchG beziehungsweise des § 6 Abs. 2 Z 3 KSchG - nur mit den sich aus den Abs. 2 und 3 ergebenden Einschränkungen wirksam.

(2) Als für Änderungen der Prämie oder des Versicherungsschutzes maßgebende Umstände dürfen nur die Veränderungen folgender Faktoren vereinbart werden: 1.eines in der Vereinbarung genannten Index, 2.der durchschnittlichen Lebenserwartung, 3.der Häufigkeit der In-



*anspruchnahme von Leistungen nach Art der vertraglich vorgesehenen und deren Aufwendigkeit, bezogen auf die auf die zu diesem Tarif Versicherten, 4. des Verhältnisses zwischen den vertraglich vereinbarten Leistungen und den entsprechenden Kostenersätzen der gesetzlichen Sozialversicherungen, 5. der durch Gesetz, Verordnung, sonstigen behördlichen Akt oder durch Vertrag zwischen dem Versicherer und im Versicherungsvertrag bezeichneten Einrichtungen des Gesundheitswesens festgesetzten Entgelte für die Inanspruchnahme dieser Einrichtungen und 6. des Gesundheitswesens oder der dafür geltenden gesetzlichen Bestimmungen.*

*Bloß vom Älterwerden des Versicherten oder von der Verschlechterung seines Gesundheitszustandes abhängige Anpassungen dürfen jedenfalls nicht vereinbart werden, insbesondere ist eine Prämienanpassung unzulässig, um eine schon bei Eingehung der Versicherung unzureichend kalkulierte Alterungsrückstellung zu ersetzen. Es kann jedoch vereinbart werden, daß eine zunächst geringere Prämie ab einem bestimmten Lebensalter des Versicherten auf denjenigen Betrag angehoben wird, den der betreffende Tarif für Versicherte vorsieht, die mit diesem Alter in die Versicherung eintreten; dieses Lebensalter darf nicht über 20 Jahren liegen.*

*(3) Erhöht der Versicherer die Prämie, so hat er dem Versicherungsnehmer auf dessen Verlangen die Fortsetzung des Vertrages mit höchstens gleichbleibender Prämie und angemessen geänderten Leistungen anzubieten. (4) Die Erklärung einer rückwirkenden Änderung der Prämie oder des Versicherungsschutzes ist unwirksam; die Erklärung wirkt erst ab dem der Absendung folgenden Monatsersten."*

### 4.3 Referenzen und weiterführende Literatur

Bankprodukte und das Kreditwesen werden in Monographien zu den Themen Bankwirtschaftslehre bzw. Kreditrisiko eingehend diskutiert. Beispielsweise ist Hartmann-Wendels et al. [24] im deutschsprachigen Raum als Standardwerk etabliert. Im Bereich der Kreditrisikomodellierung bietet Bluhm et al. [9] ein gute, wenn auch schon leicht technische, Einführung zum Thema Kreditrisikomodellierung. Aktuelle Forschungsergebnisse zum Thema Kreditrisiko sind auf der Website [www.defaultrisk.com](http://www.defaultrisk.com) gut gesammelt. Im Bereich der Risikobewertung von Unternehmen publizieren Ratingagenturen (z.B. Moody's, S&P's, Fitch) ihre Ratingkriterien, die auch einen umfassenden Einblick in die Risikofaktoren einzelner Industrien und Sektoren geben. Die Bank for International Settlements veröffentlicht zudem die regulatorischen Risiko- und Kapitalanforderung für Banken (Basel II, Basel III; [www.bis.org](http://www.bis.org)).

Im Bereich der Kapitalmärkte bieten Corporate-Finance-Bücher oft gute und beispielreiche Diskussionen der Instrumente der Fremd- und Eigenfinanzierung (d.h. auch von Anleihen und Aktien), siehe z.B. Brealey et al. [16]. Lehrbücher, wie Albrecher et al. [4], behandeln ebenso Anleihen, Aktien, Zinsmethoden, Kreditrisiko und Derivate in kompakter Form. Ein etabliertes Standardwerk im Bereich der Derivate ist Hull [25].

Im Jahr 2013 wurde das Institut für Bank- und Versicherungswirtschaft der FH Joanneum von der Österreichischen Bankwissenschaftlichen Gesellschaft damit beauftragt, eine Beitragsserie zum Thema 'Finanzwissen – allgemein verständlich' zu verfassen. In einer Reihe von Beiträgen werden in der Zeitschrift BankArchiv einzelne Finanzprodukte in ihrer grundsätzlichen Funktionsweise, ihren unterschiedlichen Erscheinungsformen sowie ihren charakteristischen Eigenschaften vorgestellt (vgl. Brauneis/Dornauer/Mestel [18], [11]). Eine gute und kompakte Einführung zu Bank- und Versiche-

rungsprodukten ist auch Teil eines, von der Österreichischen Bankwissenschaftlichen Gesellschaft erstellen und von der Arbeitsgemeinschaft Wirtschaft und Schule und der WKO didaktisch aufbereiteten bzw. herausgegebenen, Medienpakets (vgl. AWS/WKO [5]).

Im Bereich der Versicherungsprodukte schließlich, bieten Monographien zum Thema Versicherungswirtschaftslehre oft eine gute Übersicht, siehe z.B. Nguyen/Romeike [32]. Statistiken und aktuelle Informationen zur Versicherungswirtschaft sind u.a. auf [www.oecd.org](http://www.oecd.org), [www.statistik.at](http://www.statistik.at) und [www.swissre.com](http://www.swissre.com) (Sigma Serie) bzw. auf den Websites der großen Wirtschaftsprüfungs- und Beratungsunternehmen zu finden. Der Verband der Versicherungsunternehmen stellt auf seiner Website [www.vvo.at](http://www.vvo.at) Informationen und Musterbedingungen für einzelne Verisicherungssparten zur Verfügung.

## 4.4 Zusammenfassung des Kapitels

Zusammenfassend haben wir in diesem Kapital die folgenden Konzepte bzw. Inhalte erarbeitet und das Verständnis bei der Lösung von Beispielen vertieft:

- ✓ *Depotgeschäft*: Arten von Einlagen, Einlagensicherung, Stellenwert für Banken.
- ✓ *Girokonto*: Definition, Verfügung, wer kann es eröffnen.
- ✓ *Zinsen und Spesen*: Übersicht in Bezug auf das Girokonto.
- ✓ *Kredite*: Vertragsregelung, Mindestangaben im Vertrag, nach welchen Zinsberechnungsmethoden kann verzinst werden.
- ✓ *Kreditrisiko*: Definition, was umfassen qualitative und quantitative Analyse, was ist ein Rating, welche Ratingagenturen gibt es, historische Ausfallraten vs. Kreditausfallwahrscheinlichkeiten.
- ✓ *Rang/Besicherung*: Wichtigkeit von Rang (Vor-/Nachrang, pari passu) und Besicherung im Konkursfall, Arten von Sicherheiten, Absonderungsrecht aus der Konkursmasse.
- ✓ *Segmentierung des Finanzmarktes*: Geld- vs. Kapitalmarkt, Renten- vs. Aktienmarkt, Primär- vs. Sekundärmarkt.
- ✓ *Aktie*: Rechte des Aktionärs, IPO, Preisbestimmung an der Börse (Limit Order Book),
- ✓ *Anleihe*: Spezifikation, Arten, Mantel/Bogen, Staatsanleihen (Zweck der Ausgabe, Einteilung von deutschen/US Staatsanleihen), Yield, Yield Curve (was ist eine 'normale' Form), Zerorates (Bootstrapping), (Modified) Duration, Schätzung der Preisänderung bei einer Yieldänderung mittels Duration.
- ✓ *Derivate*: Definition und Abrechnungsprofil von Forward, FRA, Call/Put Option und Swap, Wertschwankungen von Swaps.
- ✓ *Individual vs. Sozialversicherung*.
- ✓ *Schadenversicherung*: Definition, Arten, Abgrenzung zur Summenversicherung, Zusammensetzung der Prämie  $P(S)$ , Prämienprinzipien, Selbstbehalt (Arten, Zweck).
- ✓ *Gesetzliche vs. private Unfallversicherung*: Unterschiede in Österreich.

- ✓ *Lebensversicherung*: Arten, objektive vs. subjektive Risiken, Sterbetafel ( $p(x)$ ,  $q(x)$ ), Prämienberechnung der Ablebensversicherung, Einflussfaktoren auf die Prämie.
- ✓ *Krankenversicherung*: in erster Linie als Ergänzung zur Sozialversicherung in Österreich, Aspekte der Risikoanalyse, Leistungsumfang, Gründe und Problematik rund um Veränderungen in den Rechnungsgrundlagen bei der nachträglichen Prämienanpassung.





## Kapitel 5

# Ausgewählte Grundlagen der Bank- bzw. Versicherungsbetriebslehre

### Inhalte und Lernziele

In diesem Kapitel werden verschiedene Aspekte des Bank- bzw. Versicherungsgeschäfts diskutiert. Die Themen umfassen jeweils Begriffsdefinitionen, die volkswirtschaftliche Bedeutung des Sektors, Risiko- und Kapitalaspekte, typische Bilanzstrukturen und Möglichkeiten des Risikotransfers. Der Versicherungsteil schließt zudem mit der Erklärung einiger versicherungstechnischer Kennzahlen. Am Ende des Kapitels werden drei wichtige ökonomische Konzepte beschrieben: asymmetrische Information, adverse Selektion und Moral Hazard. Diese Konzepte sind im Versicherungsbereich besonders relevant, finden aber auch Anwendung in vielen anderen wirtschaftlichen oder alltäglichen Situationen.

## 5.1 Bankbetriebslehre

**LI 115** **Definition der Bank:** *Definiere den Begriff 'Bank'. Welche Arten von Banken gibt es in Österreich? Gehe dabei auf die Unterscheidung Universal-, Spezial- bzw. Zentralbanken ein. Hat Österreich ein bank- oder kapitalmarkt-orientiertes Finanzsystem?*

Eine **Bank** ist ein *Kreditinstitut*, das Dienste des Zahlungs-, Finanzierungs- und/oder Kapitalverkehrs anbietet. In Österreich ist nach §1 Bankwesengesetz (BWG) ein **Kreditinstitut** wer (gesetzlich und regulatorisch) berechtigt ist, **Bankgeschäfte** durchzuführen. Um in Österreich eine *Bankkonzession* zu erhalten, muss z.B. sichergestellt sein, dass entsprechende Anforderungen, wie Mindestkapitalanforderungen, eine entsprechende Unternehmensform und eine entsprechende Qualifikation der Geschäftsführer, erfüllt sind. Als *Bankgeschäfte* werden lt. BWG beispielsweise Einlagengeschäfte, Girogeschäfte, Kreditgeschäfte, Depotgeschäfte oder Devisen-/Valutengeschäfte verstanden.

Man unterscheidet zwischen **Universal-, Sonder- und Zentralbanken**. In Österreich sind die folgenden Banken bzw. Bankgruppen den einzelnen Kategorien zugeordnet (vgl. AWS/WKO [5]):

- **Universalbanken:** bieten die gesamte Service- bzw. Produktpalette an. In Österreich umfasst

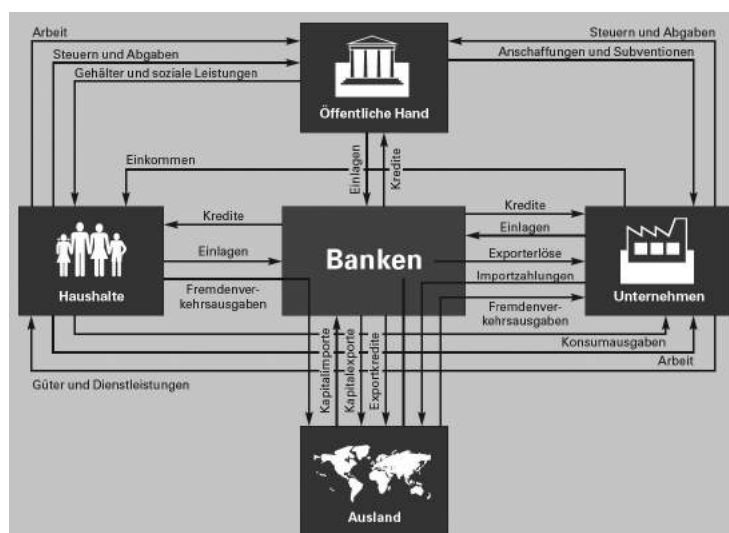
dieser Bereich fünf Gruppen: (1) die Aktienbanken (3-Banken-Gruppe, BAWAG PSK AG, Unicredit Bank Austria), (2) die Sparkassen (meist von Verein/Gemeinde gegründet; heute oft als AG organisiert), (3) die Hypothekenbanken (von Ländern mit Ziel der Immobilienfinanzierung gegründet), (4) die Raiffeisenbanken und schlussendlich (5) die Volksbanken.

- **Sonderbanken:** haben spezielle Sonderaufgaben (z.B. Wohnraumfinanzierung). Die österreichische Kontrollbank, die z.B. Garantien für Exportkredite bereitstellt, und die Bausparkassen können dieser Kategorie zugeordnet werden.
- **Zentralbanken:** haben Aufgaben der Monetärpolitik und als Bank der Banken. In Bezug auf Österreich fallen die Österreichische Nationalbank (OeNB) und die übergeordnete European Central Bank (ECB) in diese Gruppe.

Österreich hat zudem ein **bankorientiertes** Finanzsystem, d.h. ein wesentlicher Teil der Ersparnisse werden bei der Bank eingelegt und Unternehmensfinanzierungen erfolgen zu einem Großteil über Bankkredite. Im Gegensatz dazu steht ein **kapitalmarktorientiertes** Finanzsystem, wie in den USA, in dem Unternehmensfinanzierungen in erster Linie über die Kapitalmärkte (z.B. in Form von Anleihen) erfolgen, d.h. Einzelhaushalte investieren zu einem höheren Teil direkt über Anleihen oder Aktien in Unternehmen.

**LI 116** **Wirtschaftliche Bedeutung der Banken:** Welche direkten und indirekten volkswirtschaftlichen Funktionen erfüllen (Universal-)Banken? Welche Wirtschaftsteilnehmer wickeln Geschäfte über Banken ab?

Banken nehmen als zentrale **Dienstleister** am volkswirtschaftlichen Kreislauf teil und ermöglichen ihren Kunden den Zahlungsverkehr, die Finanzierung und die Anlage von Geldern. Diese Tätigkeiten nennt man auch *direkte Funktionen* des Banksektors. Banken werden durch diese zentrale Dienstleisterrolle auch oft als **Finanzintermediäre** bezeichnet. Zum Kundenkreis der Wirtschaftsteilnehmer, die ihren Zahlungsverkehr über Banken abwickeln, gehören Haushalte, Unternehmen, öffentliche Einrichtungen und das Ausland (vgl. Abbildung 5.1). Eine besondere Rolle kommt den Banken bei der volkswirtschaftlichen **Geldschaffung** zu, die wir bereits in LI 73) besprochen haben.



**Abbildung 5.1:** Die Bank als Dienstleisterin in der Volkswirtschaft (entnommen aus: AWS/WKO [5], Band 1, S. 4).

Zusätzlich erfüllen Banken **indirekte Funktionen**, die von wesentlicher wirtschaftlicher Bedeutung sind:

- **Losgrößentransformation:** Banken nehmen eine große Anzahl relativ kleiner Einlagen entgegen (z.B. Girokonten, Sparbücher). Diese vielen kleinen Einlagen können gebündelt als größere Kredite an z.B. Unternehmen vergeben werden.
- **Fristentransformation:** Banken nehmen tendenziell kurzfristiges Geld über ihr Einlagengeschäft entgegen (Girokonten, Sparbücher; 'kurze Frist'), und können auf Basis dieser Einlagen Projekte langfristiger finanzieren (Unternehmensinvestitionskredite, Wohnbaukredite; 'lange Frist'). Dies basiert auf der Beobachtung, dass selten viele Anleger ihr Geld gleichzeitig abheben. Kommt es allerdings beispielsweise zu einem Gerücht über die Zahlungsschwierigkeiten einer Bank, kann es (selten aber doch) vorkommen, dass viele Einleger ihre Gelder gleichzeitig beheben möchten (bekannt unter den Namen *Bankrun* bzw. *Sunspot-Phänomen*). Die Bank hat die Gelder aber langfristig als Kredite angelegt, sodass ihr kurzfristig Liquidität, trotz Beachtung der gesetzlichen Vorschriften über die Sicherstellung von Liquiditätsreserven, fehlen kann. Ist das Problem in erster Linie ein kurzfristiges Liquiditätsproblem, so kann die Zentralbank einspringen und Geldmittel gegen Sicherheiten zur Verfügung stellen. Anmerkung: die *Einlagensicherung* (vgl. LI 82) soll einem Bankrun entgegenwirken.
- **Risikotransformation:** durch die Zusammenfassung vieler Einzelkredite verschiedener Kreditnehmer zu einem Portfolio erreicht die Bank Risikostreuung (auch: Diversifikation). Dadurch ermöglicht sie Anlegern das Investment in diversifiziertes Kreditrisiko (etwa über Sparbücher oder den Kauf von Bankanleihen).
- **Risikocontrolling-Funktion:** die Bank analysiert im Kreditvergabeprozess und während der Laufzeit von Krediten die Kreditwürdigkeit des Kreditnehmers. Damit kommt ihr eine Kontrollfunktion zu, (a) wie Kapital in der Wirtschaft und an Haushalte verteilt wird und (b) welchen Preis (in der Form von Zinssätzen) das Risiko hat.

**LI 117** **Risikomanagement der Bank:** *Erkläre die Rolle des Risikomanagements einer Bank. Welchen Risiken ist eine Bank ausgesetzt? Was ist das Limitsystem im Kreditrisiko-Management?*

Das Risikomanagement nimmt einen zentralen Stellenwert im Bankgeschäft ein. Wie Risikomanagement konkret funktioniert - z.B. durch Diversifikation, gezielte Aufnahme bzw. Abgabe von einzelnen Risiken, den Einsatz von Derivaten oder die Sicherstellung qualitativer Standards in der operativen Prozesslandschaft - übersteigt das Format dieses Skriptums. Dennoch sollte man sich einiger Risikoklassen im Bankgeschäft konkret bewusst sein:

- **Kreditrisiko:** umfasst das Risiko, dass Kreditnehmer (oder andere Schuldner) vertraglich vereinbarte Zahlungen (a) nicht zeitgerecht und/oder (b) nicht vollständig leisten können oder wollen. Das Risiko wird oft auch **Ausfallrisiko** (engl. *Default Risk*) genannt. Da die Kreditvergabe ein Kerngeschäft der Bank darstellt, ist das Kreditrisikomanagement ein zentraler Bestandteil des Gesamtrisikomanagements.
- **Marktrisiko:** umfasst das Risiko, dass sich Marktzinssätze, Wechselkurse, Aktien- und andere Assetpreise ändern und so einen *wertmindernden Einfluss* auf das Vermögen der Bank haben.

Steigen die Marktzinsen etwa, so verliert ein vergebener fixverzinslicher Kredit an Wert (weil der fixe Zinssatz, den der Kunde bezahlt, im Vergleich zum Marktzinssatz nun kleiner wird). Vergibt eine Bank hingegen nur variabel verzinsliche Kredite (z.B. die Kreditzinsen steigen (sinken) wenn die Marktzinsen steigen (sinken)), so bleibt der Wert der vergebenen Kredite auch bei Marktzinsschwankung vergleichsweise stabil.

- **Liquiditätsrisiko:** umfasst das Risiko, kurzfristig benötigte Zahlungsmittel (a) nicht oder (b) nur zu wesentlich erhöhten Preisen zu bekommen. Dieses Risiko beruht im Wesentlichen auf der Größen- und vor allem Fristentransformationsfunktion des Bankgeschäfts (vgl. LI 116).
- **Operationelles Risiko:** umfasst das Risiko, das sich aus der Unangemessenheit oder dem Versagen von Menschen (z.B.: Mitarbeiter/innen/fehler, mangelnde Beratungsleistungen), Systemen (z.B. Programmierfehler, mangelnde Dokumentation vergangener Ereignisse/Vereinbarungen), internen Prozessen und externen Ereignissen ergibt. Rechtsrisiken, z.B. dass Verträge nicht im Sinn der Vereinbarung, oder im Interesse der Bank interpretiert werden, oder dass sich vertragliche Vereinbarungen z.B. im Insolvenzfall als gerichtlich nicht durchsetzbar herausstellen, werden auch oft zum operationellen Risiko gezählt.

Zentral (auch) im Kreditrisikomanagement ist das **Limitsystem**: die Bank definiert vorab, welchen Maximalbetrag (das *Limit*) die Forderungen gegen z.B. (a) einzelne Schuldner/innen, (b) einzelne Branchen bzw. Wirtschaftszweige, (c) einzelne Regionen (z.B. das Kreditvolumen an Unternehmen eines speziellen Landes) oder (d) Verbindlichkeiten in gewissen Währungen grundsätzlich nicht überschreiten dürfen. Hat eine Schuldnerin bei einer Bank ihr Limit erreicht (bei sehr großen Unternehmen kann das u.U. rasch der Fall sein), so darf die Bank grundsätzlich keine zusätzlichen Kredite an diese Kundin vergeben. Die Kundin kann nun z.B. eine andere Bank als Kreditgeber wählen oder Fremdkapital am Kapitalmarkt aufnehmen. Vergibt die Bank trotzdem den Kredit (aus Kundenbeziehungsgründen), so muss sie das über das Limit hinaussteigende Risiko weiterverkaufen (z.B. durch eine Ausfallsversicherung oder durch einen Verkauf von einzelnen Forderungen an Dritte (Banken, Fonds)).

**LI 118** **Bankbilanz:** Erkläre die wesentlichen strukturellen Merkmale einer typischen Bankbilanz.

Die **Bankbilanz** differenziert sich strukturell von Unternehmensbilanzen in anderen Industrien. Bei Handels- oder Produktionsunternehmen treten *Einlagen* bei Banken (Girokonten, Sparbücher) auf der Aktivseite und *Kredite* als Instrumente der Unternehmensfinanzierung, also auf der Passivseite, auf.

- Auf der Bankbilanz jedoch sind **Einlagen** (engl. *Amounts owed*) Geldbeträge, die Kunden zurückverlangen können, sodass Einlagen als Verbindlichkeiten gegenüber Kunden auf der *Passivseite* der Bilanz notiert sind.
- **Kredite** (engl. *Loans/advances*) hingegen sind Investitionen der Bank. Sie stellen eine Forderung von zukünftigen Zahlungen gegen Kreditkunden dar und sind deshalb auf der Aktivseite der Bilanz zu finden.
- Eine wesentliche Rolle kommt auch dem **Eigenkapital** (engl. *Capital*) auf der Bankbilanz zu: es muss ausreichen, um unerwartete Kreditausfälle auszugleichen und so die Einlagen zu sichern.

(a) Einlagen und (b) Kredite machen in der Regel die *größten Teile* der Bilanzsumme auf der Passiv-



bzw. Aktivseite aus. Im Speziellen gibt die Richtlinie der EU 86/635/EEC<sup>1</sup> die Struktur einer Bankbilanz, wie in Abbildung 5.2 dargestellt, vor. Für Interessierte: es sei noch angemerkt, dass die Cashflow-Rechnung für Banken im Jahres- und Industrievergleich nur beschränkte Aussagekraft hat: Cashflows müssen nicht gleichmäßig anfallen, da sich z.B. Kreditausgaben bzw. -rückzahlungen zu gewissen Daten (zufällig) häufen können und so direkte Vergleiche verzerren.

Assets (Aktiva)	Liabilities (Passiva)
A. Cash	A. Amounts owed to credit institutions
B. Cash Equivalents (e.g. short-term bonds)	1. repayable on demand
C. Loans/Advances to Credit Institutions	2. with agreed maturity dates(periods of use)
1. repaid on demand	B. Amounts owed to customers
2. other loans and advances	1. saving deposits
vergebene Kredite	2. other debts
D. Loans/Advances to Customers	C. Debts evidenced by certificates
E. Debt securities	1. debt securities issued
1. issued by public bodies	2. others
2. issued by other borrowers	D. Other liabilities
F. Shares/Variable-Interest Securities	E. Accruals and deferred income
G. Intangible Assets	F. Provisions for liabilities and charges
H. Tangible Assets (e.g. land/buildings)	1. employee pensions
I. Subscribed Capital Unpaid	2. taxation
J. Own Shares	3. other
K. Other Assets	G. Subordinated liabilities
L. Prepayments and accrued income	H. Capital and Reserves
	1. Subscribed Capital
	2. Share premiums
	3. Reserves
	4. Retained Earnings (past profits/losses)

Tangible=Materiell, Intangible=Immateriell, Receivables=Forderungen, Prepayments/Accruals=Rechnungsabgrenzung, Capital=Eigenkapital (inkl. Rücklagen), Debts evidenced=ausgegebene Bankanleihen

Abbildung 5.2: Bilanzstruktur einer Bank gem. EU Richtlinie 91/674/EEC.



**88** Besuche die Webseiten [www.bankaustria.at](http://www.bankaustria.at), [www.deutsche-bank.de](http://www.deutsche-bank.de) und [www.bnpparibas.com/en](http://www.bnpparibas.com/en). Versuche, die letzten Jahresberichte der Banken zu finden. In der Regel sind diese in einem Menü unter *Investor Relations* oder *Investors* abgelegt. Finde die Bilanzen in diesen Jahresberichten und überprüfe, welchen Anteil der Bilanzsumme (a) Einlagen an (a.1) Kreditinstitute und (a.2) Kunden bzw. (b) begebene Kredite ausmachen.

**Lösung:** Wird dem/der Leser/in überlassen.

**LI 119** **Regulatorisches Kapital und Banken:** Erkläre, was regulatorische Eigenkapitalvorschriften in Bezug auf Banken sind. Gehe dabei auf Basel II bzw. kurz auf Basel III ein.

Das Kerngeschäft der Banken besteht in der Regel aus der Aufbewahrung von Geldmitteln einzelner Einlegerinnen und der Vergabe von Krediten an Haushalte, Unternehmen und Körperschaften. Dabei geht die Bank neben dem Kreditrisiko auch einige andere Risiken ein (siehe LI 117). Fallen aus diesen Risiken Verluste für die Bank an, so sollen diese nicht von den Einlegern, sondern von den Eigenkapitalgebern der Bank getragen werden. In diesem Sinne gilt es, regulatorisch sicherzustellen, dass jederzeit genügend Eigenkapital in der Bank vorhanden ist, um einen ausreichenden Schutz der Einleger zu gewährleisten. In der EU erfolgt diese regulatorische Kontrolle derzeit im Rahmen der **Basel II** Eigenkapitalvorschriften, die auf den Richtlinien 2006/48/EEC und 2006/49/EEC basieren. Seit Beginn 2014 gilt mit Basel III eine Erweiterung der Basel II Regeln, die in der Folge der internationalen Finanzkrise durch die Überarbeitung der Eigenkapitalanforderungen (mittels EU-Richtlinie 2013/36/EEC und der Verordnung 575/2013) geschaffen wurde. Wir stellen an dieser Stelle

<sup>1</sup>Die Richtlinie wurde später angepasst, etwa durch 2003/51/EG, zeigt jedoch auch in der ursprünglichen Fassung eine gute Übersicht über die Struktur der Bankbilanz.

die 3-Säulen von Basel II vor (vgl. Abbildung 5.3), und ergänzen später an welchen Stellen die Basel III-Erweiterungen ansetzen:

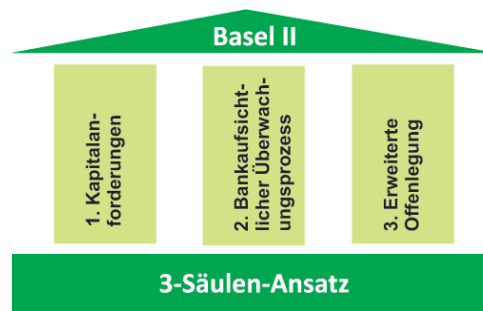


Abbildung 5.3: Die drei Säulen von Basel II.

1. **Kapitalanforderungen:** die Bank muss ihre einzelnen Risiken messen (z.B. Kredite, Kreditlinien, Risiken aus Derivatverträgen). Nach dem Standardansatz hat die Bank Eigenkapital in Höhe von mindestens

$$8\% \cdot (\text{Risikogewichtete Aktiva} + 12,5 \cdot (\text{Markttrisiko} + \text{Operationelles Risiko}))$$

zu halten. Die Risikogewichtung der jeweiligen Aktiva (engl. *Risk-weighted assets (RWA)*) wird dabei anhand des Risikoprofils des jeweiligen Schuldners und Titels getroffen. Nach dem Standardansatz können sehr sichere Forderungen (z.B. gegen die ECB oder AAA/AA-OECD Staaten) mit 0% gewichtet werden, Unternehmenskredite werden je nach Risikoklasse in der Regel mit 20% bis 150% gewichtet.<sup>2</sup> Das Gewicht von 12,5 vor dem Markt- bzw. operationellen Risiko stellt sicher, dass diese Positionen zu 100% durch Eigenkapital abgedeckt sind (d.h.  $0,08 \cdot 12,5 = 1$ ).

2. **Bankaufsichtlicher Überwachungsprozess:** die Bankenaufsicht überwacht die Angemessenheit der Risikomanagementsysteme (Überwachung und Steuerung), des Berichtwesens und der internen Kapitalausstattung in Bezug auf das Risikoprofil der Bank. Alle Banken müssen diesem Evaluierungsprozess unterzogen werden und bei Nichterfüllung einzelner Anforderungen sind von Seiten der Aufsicht entsprechende Maßnahmen zu setzen.
3. **Erweiterte Offenlegung:** Banken haben qualitative und quantitative Aspekte ihrer Eigenkapitalinstrumente offenzulegen. Ebenso müssen die angewandten Techniken der Risikomessung, -überwachung und -steuerung kommuniziert werden. Durch die erweiterte Offenlegung sollen Banken durch das drohende Fallen der Preise der Bankaktien zur Disziplin angehalten werden.

Die Basel-III-Erneuerungen brachten (a) die Einführung eines zusätzlichen Kapitalerhaltungspuffers, (b) eine striktere Definition, welche Instrumente als (Kern-)Eigenkapital gezählt werden dürfen, (c) die Einführung einer maximalen Schuldenquote (max Assets/Kapital) und (d) die Sicherstellung der Liquidität durch die Überwachung von Liquiditätsquoten über 30 Tage bzw. ein Jahr (Liquidity Coverage Ration, Net Stable Funding Ratio). Ein einheitliches Regelsystem innerhalb der EU ist auch deshalb wichtig, weil in einem Mitgliedsland zugelassene Banken auch in anderen Mitgliedstaaten

<sup>2</sup>Als Alternative zum Standardansatz existiert noch ein wählbarer Internal Rating-based Approach (IRBA), der darauf abzielt, in 99,9% der Fälle unerwartete Verluste über das Eigenkapital abzudecken (vgl. BIS [34]).

geschäftlich aktiv sein dürfen (diese automatische Zulassung in anderen Staaten nennt man *Passporting*). Die Einhaltung der Basel II/III-Regeln wird von der jeweiligen Bankenaufsicht sichergestellt: in Österreich hat diese Rolle die Finanzmarktaufsicht (FMA) in Verbindung mit der Österreichischen Nationalbank (OeNB) inne.<sup>3</sup>

**LI 120** **Bilanz-, Risiko- und Kapitalmanagement für Banken:** Welche Möglichkeiten des aktiven Bilanz- und Risikomanagements hat eine Bank? Gehe auf Syndizierung und Verbriefung näher ein.

Zum einen kann die Bank mit dem Kauf von (a) **Kreditversicherungen** oder (b) (strukturell ähnlichen) **Kreditderivaten** (z.B. *Credit Default Swaps*) einzelne Kreditpositionen und Kreditbücher im Sinne eines aktiven Bilanzmanagements absichern (auch: *hedgen*). Im Vorfeld der Finanzkrise stieg die Nachfrage nach Kreditderivaten stark an, sodass die Prämien kurzfristig in die Höhe schnellten und Versicherungsgeber wesentliche und z.T. bedrohliche Wertberichtigungen bestehender Verträge hinnehmen mussten. Weiters sind in der Finanzkrise Zweifel aufgetreten, ob bei systematischen Kreditausfällen Versicherungsgeber in der Lage wären, die gesamten Ansprüche auszubezahlen (z.B. musste die einst größte Versicherung der Welt, American Insurance Group (AIG), Milliarden-Abschreibungen u.a. im Kreditversicherungsgeschäft hinnehmen, ein Überleben war nur mit der Hilfe des amerikanischen Steuerzahlers möglich). So haben Kreditversicherungen zum einen (a) einen Einzelschadenaspekt (bei der Insolvenz einzelner Unternehmen; ähnlich wie z.B. bei der Kfz-Versicherung), zum anderen aber gibt es auch (b) einen systemischen Schadenaspekt (bei der Insolvenz vieler Unternehmen gleichzeitig, wie in Finanzkrisen; ähnlich wie bei der Katastrophenversicherung), den man in der Vergangenheit vielleicht unzureichend beachtet hat.

Zwei weitere Systeme des Risikotransfers stehen den Banken noch zur Verfügung: (a) die **Syndizierung** (den Verkauf von Risikoteilen an andere Banken) und (b) die **Forderungsverbriefung** (in der Grundidee: den Verkauf von Risiko an Kapitalmarktinvestoren).

- Bei der *Syndizierung* 'verkauft' eine Bank A Kredite oder spezielle Risikoteile von Krediten an andere Banken B.<sup>4</sup> Anders formuliert, indem A einen Teil der Kreditforderung abtritt, wird auch der mögliche Verlust im Konkursfall des Schuldners reduziert. Wir konzentrieren uns hier auf die Auswirkung auf das Risikoprofil (d.h. den Verlust beim Ausfall des Schuldners) des bei der ersten Bank verbleibenden Teils des Kredits (vgl. Abbildung 5.4, der grau dargestellte Teil verbleibt jeweils bei Bank A). Bank A kann (a) einen vertikalen Teil des Kredits an B verkaufen ('Vertikaler Split'); im Konkursfall sind A und B vom Rang her *pari passu* (gleichgestellt; vgl. LI 88) und A und B verlieren *denselben Prozentsatz* ihres Anteils am Kredit. Weiters könnte A einen vorrangigen Teil (auch: **Senior Tranche**) des Kredits behalten, und einen nachrangigen Teil (auch: **Junior Tranche**) an B verkaufen ('Horizontaler Split'). Dabei wird B einen höheren Zinssatz auf den gekauften Teil verlangen, da im Konkursfall B zuerst verliert; A verliert nur, wenn der gesamte Verlust die Forderung von B übersteigt. A könnte dann beliebige Teile des verbliebenen Teils weiterverkaufen ('Gemischter Split').
- Die *Forderungsverbriefung* funktioniert wie folgt: die Bank gründet ein neues Unternehmen (eine

<sup>3</sup>Anmerkung: mit dem einheitlichen europäischen Bankenaufsichtsmechanismus (auch: Euro-Bankenaufsicht) hat die ECB mit November 2014 die Aufsicht über Großbanken (Bilanzsumme >€30 Mrd. oder 20% der Wirtschaftsleistung eines Landes) übernommen.

<sup>4</sup>Bei sehr großen Krediten (z.B. bei Unternehmensakquisitionen) tritt oft ein Konsortium von mehreren Banken (das sogenannte *Syndikat*) gemeinschaftlich als Kreditgeber auf, und jeder Syndikatsteilnehmer stellt einen Teil der Kreditsumme zur Verfügung.

sogenannte **Zweckgesellschaft** oder ein **Special Purpose Vehicle (SPV)**). Das SPV emittiert Anleihen und verkauft diese an Investoren. Mit dem Erlös der Anleihen kauft das Unternehmen Kredite der Bank. Je nachdem welche Qualität die vom SPV gekauften Kredite haben, werden die Anleiheninvestoren einen entsprechenden Zinssatz (oder genauer: eine entsprechende Yield, vgl. LI 94) verlangen. Die Bank hat damit Kredite verkauft und erleidet keine Verluste falls Schuldner von verkauften Krediten ausfallen. Zum anderen ermöglicht diese Konstruktion den Anleiheninvestoren ein Investment in ein Portfolio von Krediten (normalerweise würden sie zur Kreditvergabe eine Banklizenz benötigen). Eine Verbriefung von Krediten ist schematisch in Abbildung 5.5 dargestellt. Werden Konsumenten- oder andere Kleinkredite verbrieft, spricht man von **Asset Backed Securities**. Insgesamt erhöht die Verbriefung das Finanzierungsvolumen eines Finanzmarktes über die Bankkapazität hinaus. In den USA hat die Verbriefung eine lange Tradition, in Europa nur beschränkt.<sup>5</sup>

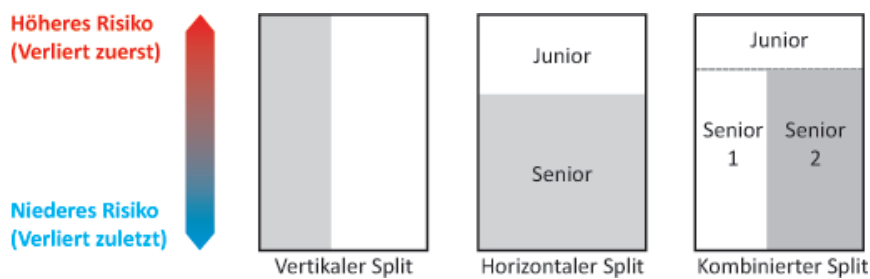


Abbildung 5.4: Strukturelle Darstellung verschiedener Syndizierungsmöglichkeiten.

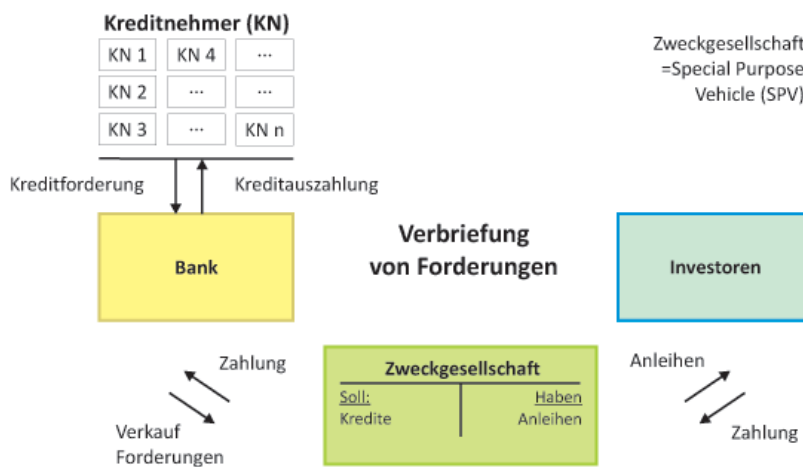


Abbildung 5.5: Strukturelle Darstellung einer Kreditverbriefung über die Gründung einer Zweckgesellschaft (SPV), welche Anleihen an Kapitalmarkt-Investoren ausgibt.



89 Eine Bank A vergibt einen Kredit von €40 Mio. zu einem Zinssatz von 4%. Danach möchte sie ihr Risikoexposure zu dem Schuldner aufgrund von Limitproblemen (vgl. Limitsystem in LI 117) senken. Die Bank A möchte einen 15 Mio.-Kredit syndizieren und bekommt zwei Angebote von Syndizierungspartnern: (a) Bank B würde eine vertikale Tranche von 15 Mio. zu einem Zinssatz von 3.8% übernehmen und (b) Bank C würde eine Junior Tranche von 15 Mio. zu einem Zinssatz von 7% übernehmen. (1) Berechne, welchen Zinssatz A nach der Syndizierung im Fall (b) auf den verbleibenden Teil bekommt. (2) Wie hoch ist der Verlust für A und

<sup>5</sup>Verbrieferungen sind allerdings ähnlich zu von Banken ausgegebene **Covered Bonds**, die eine Forderung gegen die Bank sind, die zusätzlich durch einzelne Kredit(teil-)forderungen der Bank *besichert* sind. In Deutschland stellen die sogenannten **Pfandbriefe** einen Großteil des Covered Bond-Marktes dar. Sie gelten durch die im Pfandbriefgesetz strengen Auflagekriterien als extrem sicher, vgl. [www.pfandbrief.de](http://www.pfandbrief.de).

B (im Fall (a) bzw. Fall (b)), wenn der Schuldner in Konkurs geht und 18 Mio. als Erlös aus der Konkursmasse kommen, die dann zur Abgeltung der Kreditforderung herangezogen werden können.

**Lösung:** Für Fall (a) ergibt sich der Zinssatz  $r$  auf die verbleibenden 25 Mio. als  $40 \cdot 0,04 = 15 \cdot 0,038 + 25 \cdot r$ , also  $r = 0,0412$ . Im Konkursfall sind A und B pari passu, sodass jeder  $(40 - 18)/40 = 55\%$  der jeweiligen Forderung verliert: A verliert 13,75 und B verliert 8,25. Im Fall (b) berechnen wir den Zinssatz als  $40 \cdot 0,04 = 15 \cdot 0,07 + 25 \cdot r$ , also  $r = 0,02$ . Dieser Zinssatz ist geringer als die ursprünglichen 4%, dafür ist auch das Verlustrisiko im Konkursfall wesentlich reduziert. Konkret wird A im Konkursfall vorrangig zu B behandelt: A bekommt 18 Mio., und verliert daher 7 Mio., B verliert alles, also 15 Mio., da nach der (Teil-)Tilgung der Forderung von A keine Geldmittel mehr übrig sind.

## 5.2 Versicherungsbetriebslehre

**LI 121** **Definition der Versicherung:** Versuche, die Begriffe (a) Versicherung und (b) Versicherer (umgangssprachlich auch: Versicherung) zu definieren. Was unterscheidet (a) wechselseitige Versicherer von (b) Versicherern, die Kapitalgesellschaften sind?

Der Begriff **Versicherung** an sich ist nicht so einfach zu definieren. Im Speziellen soll eine Definition die Versicherung vom (a) Glücksspiel und von (b) eigenständigen Maßnahmen zur Schadensverhinderung (auch: *Selbstversicherung*; z.B. der Kauf einer Alarmanlage) abgrenzen. Definitionen wie "... Versicherung ist der Austausch einer Zahlung zum jetzigen Zeitpunkt (Prämie) gegen den Empfang einer Zahlung (Versicherungsleistung), bedingt auf das Eintreten eines zufälligen Ereignisses in einem definierten Zeitraum..." (sinngemäß: Arrow 1965) umfassen auch das Glücksspiel. Der Versuch einer sauberen Definition wird dem/der Leser/in überlassen. Jedenfalls meinen wir mit Versicherung jenen Vorgang, im Rahmen dessen (a) ein Versicherungsnehmer einem Versicherungsgeber eine bestimmte Prämienzahlung leistet und (b) danach über einen definierten Zeitraum (c) zufällig auftretende Schäden (c.1) am Versicherten oder (c.2) an bestimmten Dritten (z.B. Verletzte bei einem vom Versicherten verursachten Autounfall) vom Versicherungsgeber (d) in der Regel und auf eine vorab definierte Weise kompensiert werden.

Ein **Versicherer** (wir bedienen uns in der Folge auch dem umgangssprachlichen 'eine Versicherung') ist dann jene Partei eines Versicherungsvertrags, welche gegen Entgegennahme einer Prämie Versicherungsschutz gewährt. Die wesentlichen Arten von Versicherern sind (a) die **wechselseitige Versicherung** (engl. *Mutual insurance*) und (b) der Versicherer in Form einer **Kapitalgesellschaft** (engl. *Stock company*). Im Fall (a) sind die Kunden auch die Eigentümer der Versicherung, im Fall (b) ist dies in der Regel nicht der Fall. Das operative Betreiben der Versicherung wird in beiden Fällen von Dritten, den Managern, wahrgenommen. Zusätzlich existiert noch die **Sozialversicherung**, die eine Form der wechselseitigen Versicherung mit besonderen Regeln darstellt. Unterschiede zwischen der Sozial- und der Individualversicherung wurden bereits in Kapitel 4 diskutiert.



**90** Als dritte Form eines Versicherers existiert noch der Versicherungsmarkt **Lloyd's**. Recherchiere unter [www.lloyds.com](http://www.lloyds.com), wie dieser Versicherungsmarkt funktioniert, wer als Eigentümer, Manager bzw. Kunde auftritt und welche Arten von Versicherungen in der Regel abgeschlossen werden.

**Lösung:** wird dem/der Leser/in überlassen.

**LI 122** **Wirtschaftliche Bedeutung der Versicherungen:** *Welche direkten und indirekten volkswirtschaftlichen Leistungen erbringt der Versicherungssektor?*

Wie schon in Abschnitt 4.2 beschrieben, ermöglicht es Versicherungsschutz, spezifische größere ungewisse zukünftige Schäden (Feuerschaden, Schadenersatzklage, Einkommensentgang bei Ableben) gegen kleinere regelmäßige Zahlungen (Prämien) zu tauschen. Diese Möglichkeit, **bestehendes Vermögen zu schützen** (und somit keinen finanziellen 'Sicherheitspolster' bilden zu müssen), wird oft als Motor gesehen der die Bereitschaft von Haushalten und Unternehmen wesentlich steigert, risikobehaftete Aktivitäten zu unternehmen bzw. in solche zu investieren. Neben dieser *direkten* Funktion, die gleichzeitig eine der zentralsten Funktionen des Versicherungssektors ist, gibt es noch weitere *indirekte Funktionen*:

- **Kapitalaggregation:** besonders in der Lebensversicherung, aber auch im Bereich Nicht-Leben, treten Versicherungen als Großinvestoren auf. Ca. 25% aller finanziellen Anlagen weltweit werden Versicherungen zugeschrieben (vgl. Swiss Re [37], S. 3ff). Dabei fasst die Versicherung geleistete Prämien zusammen, und kann so großvolumige Investments tätigen, wie z.B. bei der (Fremd-)Finanzierung von Unternehmen. Die Veranlagung erfolgt meist maßgeschneidert in Bezug auf die erwarteten zukünftigen Auszahlungsverpflichtungen der Versicherung, sodass das Liquiditätsmanagement ein zentrales Thema in der Veranlagung ist. Im Bereich Nicht-Leben investieren Versicherungen meist in Anlagen mit gut vorhersagbaren Cashflows (z.B. Anleihen, Immobilien) bzw. mit tendenziell niedrigerem Risiko (z.B. Anleihen mit gutem Rating).
- **Transferleistung und Unterstützung des Staates:** neben den Sozialleistungen stellt auch die Versicherungswirtschaft Transferleistungen bereit. So fließen z.B. Rentenleistungen an Hinterbliebene oder im Invaliditätsfall, was auch eine Umverteilung des Geldes hin zu einkommenschwächeren Klassen bringen kann. Versicherungen entlasten somit staatliche Haushalte. Ein anderes Beispiel kommt aus dem Bereich der Katastrophenversicherung, im Rahmen derer der Staat beim Leisten von Katastrophenhilfe über die Versicherungsleistung entlastet werden kann.
- **Risikotransformation:** besonders bei der wechselseitigen Versicherung (engl. *Mutual Insurance*) sieht man wie sich das Risiko des Einzelnen verändert. Zahlt jede Teilnehmerin dieselbe Prämie für die Versicherung eines speziellen Risikos (Kfz-Unfall, Ernteausschlag), so trägt sie nun den meist niedrigeren Durchschnittsschaden aller Versicherten in Form der Prämie, während sie vorher das Risikoprofil 'kein Schaden' vs. hoher Einzelschaden hatte. Die Zusammenfassung der Einzelrisiken zu einem Portfolio bringt somit *Diversifikation*.
- **Risikokontrollfunktion:** durch das Festsetzen einer Prämie je nach Risikoprofil kommt der Versicherung auch eine Risikokontrollfunktion zu. Versicherungen sind Risikoexperten, sammeln umfassend Daten zu Schadensfällen und bewerten bei der Prämienberechnung verschiedenste Risiken. Damit ist am Markt erkennbar, welche Aktivitäten welches finanzielle Risiko und u.U. welche gesellschaftlichen Kosten mit sich bringen, was regulierend auf das Verhalten von Marktteilnehmern wirken kann. Beispielsweise sind Folgeschäden der Atomkraftproduktion momentan i.d.R. nicht versicherbar, somit fehlt eine gewisse Kontrollfunktion bzgl. des Risikos der Produktion von Atomkraft. Wären Atomunfälle umfassend versicherbar, wäre die Prämie für diese Versicherung vermutlich hoch. Müssten Produzenten von Atomkraft die Produktion versichern

und diese Prämien bezahlen, könnte dies auch die Konkurrenzfähigkeit von Atomstrom beeinflussen.

**LI 123** **Risikoaggregation in der Versicherung:** Erkläre, welche Rolle die Risikoaggregation im Versicherungsreich hat. Was ist der Anknüpfungspunkt zum zentralen Grenzwertsatz in der Mathematik? Was ist der Value-at-Risk?

Die Versicherung aggregiert viele Einzelrisiken<sup>6</sup>  $R_i \geq 0$  über das Ausstellen von Versicherungsverträgen. Nehmen wir an, dass eine Versicherung insgesamt  $n$  Einzelrisiken versichert. Damit gilt für das **aggregierte** versicherte Risiko der Versicherung  $S = R_1 + R_2 + \dots + R_n$  und es ist die Aufgabe der Versicherung, sicherzustellen, dass  $S$  sehr wahrscheinlich ausbezahlt werden kann. Dazu versucht die Versicherung, die Verteilung von  $S$  möglichst gut zu beschreiben.

- **Musterfall:** sind (1) die einzelnen Schadensrisiken  $R_i$  identisch verteilt und (2) sind alle Schäden voneinander unabhängig, so wissen wir durch den zentralen Grenzwertsatz (vgl. LI 54), dass  $S$  für großes  $n$  (annäherungsweise) normalverteilt wird, mit Mittelwert  $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[R_1] + \mathbb{E}[R_2] + \dots + \mathbb{E}[R_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[R_i]$  und Varianz  $\text{Var}[S] = \text{Var}[R_1] + \dots + \text{Var}[R_n]$ .
- Wir sehen, dass die Modellierung von  $S$  als normalverteilte Zufallsvariable kritisch hinterfragt werden muss, wenn eine der Annahmen verletzt ist: z.B. (a) wenn  $n$  nicht groß genug ist (z.B. bei der Versicherung weniger großer Risiken), (b) wenn die einzelnen Schadensrisiken nicht derselben Verteilung folgen oder (c) wenn der Eintritt von Schadensfällen nicht unabhängig ist. Manchmal ist es schwierig, vor allem die Unabhängigkeitskomponente richtig einzuschätzen: beim Schreiben von Kreditversicherungen vor der Krise wurde z.B. systematisch das Risiko unterschätzt, dass Zahlungen für viele Versicherungsverträge gleichzeitig anstehen (wie z.B. während einer systemischen Kreditkrise). Ebenso können technische Fehler (z.B. häufiger Motorschaden eines Modells), Naturgewalten (z.B. Hagelschäden; Lawinen/Hochwasser sind oft explizit von der Schadenversicherung ausgenommen) oder Klagswellen (die Forderungen im Rahmen von Rechtsschutzversicherungen nach sich ziehen) Tatsachen sein, welche die Unabhängigkeitsannahme der Einzelschäden wesentlich verletzen.

Im Zusammenhang mit der Modellierung von aggregierten Risiken (in der Versicherungs- aber auch der Bankenwelt) berechnet man oft den sogenannten **Value-at-Risk**. In Bezug auf das aggregierte Risiko  $S$  unseres Versicherers, ist der Value-at-Risk z.B. zum Niveau  $\alpha = 95\%$ ,  $\text{VaR}_{0.95}(S)$ , jene aggregierte Schadenshöhe, die in 95% der Fälle (gemäß unserer Modellierung der Verteilung von  $S$ !) nicht überschritten wird. Mathematisch kann man für (vereinfachende Annahme: stetige) Zufallsvariablen  $S$  schreiben, dass

$$\text{VaR}_{0.95}(S) = x \quad \text{mit} \quad \mathbb{P}[S \leq x] = 0.95. \quad (5.1)$$

Die Verwendung des Value-at-Risk ist ob seiner Einfachheit und Interpretierbarkeit weit verbreitet. Kritiker bemängeln jedoch, dass (a) Modelle im 95%-Quantil-Bereich (dem sogenannten **oberen Tail** der Verteilung) extrem schwierig zu schätzen sind, da u.a. nur sehr wenige extreme Verluste statistisch beobachtet werden und (b) dass der Value-at-Risk die Verteilung jener Verluste oberhalb des 95%-Prozent Quantils außer Acht lässt (sind große Verluste extrem hoch oder nahe am Value-at-Risk-Wert?). Als abschließende kritische Illustration zeigt Abbildung 5.6 zwei verschiedene Dichtefunktionen  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  die denselben Value-at-Risk produzieren, aber klarerweise nicht dasselbe Risiko darstellen.

<sup>6</sup>Die Leistung der Versicherung in Bezug auf ein versichertes Risiko ist 0 wenn kein Schaden auftritt, und sonst eine positive Schadensgröße. Somit ist  $R_i$  nicht negativ

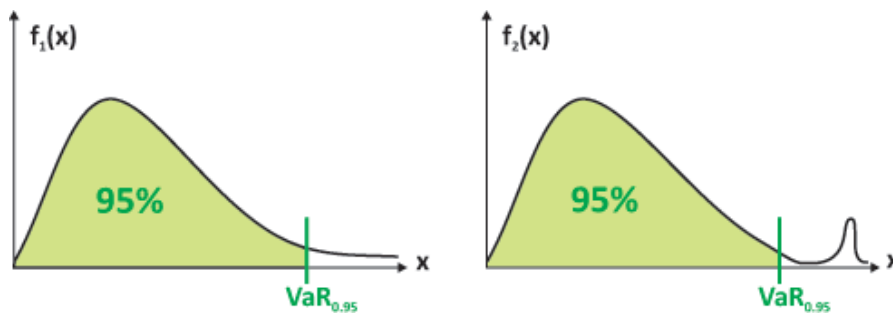


Abbildung 5.6: Unterschiedliche Dichtefunktionen (also Risikostrukturen), die denselben Value-at-Risk haben.

Das folgende Beispiel illustriert, wie Risikotransformation im Versicherungssektor funktioniert und verwendet dabei das Value-at-Risk Konzept.



**91** Eine Versicherung versichert (a) 100, (b) 1000 oder (c) 10.000 Einzelrisiken  $R_i$ , wobei jedes Risiko mit einer Wahrscheinlichkeit von  $q = 0,05$  einen Schaden von 100 verursacht. Einzelschäden werden als voneinander unabhängig angenommen. Die Versicherung schlägt auf den Erwartungsschaden eine Risikoaufschlag auf, sodass mit der Einnahme aller Prämien mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% alle Versicherungsschäden bezahlt werden können (vgl. Value-at-Risk). Verwende für deine Berechnungen eine Approximation durch die Normalverteilung.

**Lösung:** Wir berechnen  $\mathbb{E}[R_i] = 0,05 \cdot 100 = 5$  und  $\text{Var}[R_i] = 95^2 \cdot 0,05 + 5^2 \cdot 0,95 = 475$ . Für  $n$  Versicherungskäufer gilt deshalb für das Portfoliorisiko  $S = R_1 + \dots + R_n$ , dass

$$\mathbb{E}[S] = n \cdot 5 \quad \text{und} \quad \text{Var}[S] = n \cdot 475.$$

Daher modellieren wir  $S$  mittels einer Normalverteilung  $N(5 \cdot n; 475 \cdot n)$  mit ebendiesem Erwartungswert und ebendieser Varianz (engl. *Moment-Matching*). Wir schlagen das 95%-Quantil einer Zufallsvariablen  $Z \sim N(0, 1)$  in der Normalverteilungstabelle in Appendix A.3 als 1,645 (genau zwischen 1,64 und 1,65) nach, d.h.  $\mathbb{P}[Z \leq 1,645] = 0,95$ . Der Gesamtschaden  $S$  hat dann dieselbe Verteilung wie die normalverteilte Zufallsvariable  $Z \cdot \sqrt{475 \cdot n} + 5 \cdot n \sim N(5 \cdot n; 475 \cdot n)$  (vgl. LI 53) und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z \leq 1,645] &= \mathbb{P}[Z \cdot \sqrt{475 \cdot n} + 5 \cdot n \leq 1,645 \cdot \sqrt{475 \cdot n} + 5 \cdot n] \\ &= \mathbb{P}[S \leq 1,645 \cdot \sqrt{475 \cdot n} + 5 \cdot n] = 0,95. \end{aligned}$$

Die aggregierten Versicherungsleistungen übersteigen somit mit 95% Wahrscheinlichkeit den Erwartungswert von  $\mathbb{E}[S] = 5 \cdot n$  nicht um mehr als  $1,645 \cdot \sqrt{475 \cdot n}$ . Pro Vertrag beträgt der verrechnete Risikoaufschlag dann

$$\frac{1}{n} \cdot 1,645 \cdot \sqrt{475 \cdot n} = \frac{1,645 \cdot \sqrt{475}}{\sqrt{n}}.$$

Damit ergibt sich auf den jeweiligen Erwartungsschaden  $\mathbb{E}[R_i] = 5$  ein Aufschlag von 3,58 oder 71,7% im Fall (a), von 1,13 oder 22,7% im Fall (b) und von 0,36 oder 7,17% im Fall (c).

Wir sehen, dass der Risikoaufschlag mit zunehmender Portfoliogröße immer geringer wird. Dies beruht auf der Tatsache, dass die Varianz pro Versicherungsvertrag, also  $\text{Var}[S]/n$  gegen 0 geht und der Durchschnitt aller Schadenszahlungen trotz steigender Portfoliovarianz für genügend



großes  $n$  'ziemlich sicher' bei  $\mathbb{E}[R_i] = 5$  liegt. Auch wenn dieses Modell stark vereinfacht ist, illustriert es sehr gut, warum Versicherung funktioniert und Sinn macht.

**LI 124** **Versicherungsbilanz:** Erkläre die wesentlichen strukturellen Merkmale einer typischen Versicherungsbilanz aus dem Sektor Nicht-Leben.

Die größten Positionen auf der Bilanz eines Versicherers sind (a) die **Investments** (Anmerkung: der Prämien; engl. *Financial investments*) auf der Aktivseite und (b) **technische Rückstellungen** (engl. *Technical provisions* oder *Technical reserves*) für zukünftige Auszahlung von Versicherungsleistungen nach Schadensfällen.

Am Investmentkonto machen fast immer *fixverzinsliche Wertpapiere* (engl. *Fixed-income securities*) den größten Anteil aus. Die Versicherung ist somit eine relativ **risikoaverse** Investorin, da ihre primäre Aufgabe die Sicherstellung der Auszahlung zukünftiger Versicherungsleistungen ist. Weitere Positionen, die spezifisch auf Bilanzen von Versicherungsunternehmen auftauchen, sind (die einzelnen Positionen werden anhand der Bilanz 2013 der Allianz Gruppe, vgl. Abbildung 5.7 illustriert):

- **Beitragsüberträge:** im Versicherungsgeschäft unterscheidet man zwischen **gezeichneten** und **verdienten Prämien**. Stellt eine Versicherung am 1.7. eines Jahres 2012 eine Jahresprämie von 100 in Rechnung, so ist die Prämie zu je 50% den Jahren 2012 und 2013 zurechenbar. Im Jahr 2012 wurde deshalb eine Prämie von 100 *gezeichnet*, aber nur eine Prämie von 50 verdient. Die restlichen 50 beziehen sich auf Versicherungsschutz im Jahr 2013, sodass diese auf der Bilanz als Verbindlichkeit gegenüber der Kundin 'reserviert' werden. Die Allianz Gruppe verzeichnete im Jahr 2013 €18,2 Mrd. von Beitragsüberträgen, also gezeichneten Prämien die sich auf Versicherungsschutz in der Zukunft beziehen.
- **Rückversicherungsaktiva bzw. Rückversicherungsverbindlichkeiten:** im Sinn eines aktiven Bilanzmanagements kann eine Versicherung spezielle Teile ihres Risikos an einen Rückversicherer gegen die Bezahlung einer Rückversicherungsprämie verkaufen. Bei Schadensfällen erhält die Versicherung dann u.U. Rückversicherungsleistungen: anstehende Zahlungen von Rückversicherern können oft auf der Bilanz als Aktivposten ausgewiesen werden. Die Allianz Gruppe hat mit Jahresende 2013 noch €12,6 Mrd. an zukünftigen Rückversicherungsleistungen identifiziert.
- **Aktivierete Abschlusskosten** (engl. *Deferred acquisition costs*): der Neuabschluss eines Versicherungsvertrags, besonders im Bereich Leben, kann mit wesentlichen Kosten verbunden sein. Vor allem Brokergebühren können sich beispielsweise je nach Markt in einem Bereich von 50% bis 150% einer Jahresprämie bewegen.<sup>7</sup> Je nach Rechnungslegungsstandard kann es möglich sein, Abschlusskosten zu aktivieren und über mehrere Jahre abzuschreiben. Aktivierete Beträge sind dann auf der Bilanz zu finden. Die Allianzgruppe etwa hatte 2013 €22 Mrd., oder ca. 3% der gesamten Bilanzsumme, an Abschlusskosten aktiviert. Bei jungen Versicherungen, die viel Neugeschäft generieren müssen, können Abschlusskosten einen wesentlich größeren Teil der Bilanzsumme ausmachen.

Im Speziellen gibt die Richtlinie der EU 91/674/EEC<sup>8</sup> die Struktur einer Versicherungsbilanz, wie in

<sup>7</sup>Weltweit führende Broker wie Marsh & McLennan, Aon oder Willis Group verzeichnen Umsätze im ein- bis zweistelligen Milliarden-US\$ Bereich, wobei jeweils ca. 50% der Umsätze im Bereich Unternehmensversicherung generiert wird. Die größten zehn Versicherungsbroker weltweit, die alle in England oder den USA ansässig sind, setzten im Jahr 2012 ca. US\$37 Mrd. um (Quelle: Business Insurance, 07/2013).

<sup>8</sup>Die Richtlinie wurde später angepasst, etwa durch 2003/51/EG, zeigt jedoch auch in der ursprünglichen Fassung ein gute Übersicht über die Struktur der Versicherungsbilanz.

Abbildung 5.8 zeigt, vor. Ähnlich wie bei Banken, gilt auch bei Versicherungen, dass die Cashflow-Rechnung nur beschränkte Aussagekraft hat, da große Zahlungen (z.B. Rückversicherungsleistungen, Abwicklungen großer Schäden) den Vergleich über die Zeit und innerhalb der Branche erschweren.

MIO €	Angabe	31.12.2013	31.12.2012
<b>AKTIVA</b>			
Barreserve und andere liquide Mittel	7	11 207	12 437
Erfolgswirksam zum Zeitwert bewertete Finanzaktiva <sup>1</sup>	8	7 245	7 283
Finanzanlagen <sup>2</sup>	9	411 015	401 628
Forderungen an Kreditinstitute und Kunden	10	116 800	119 369
Finanzaktiva aus fondsgebundenen Verträgen		81 064	71 197
Rückversicherungsaktiva	11	12 609	13 254
Aktivierete Abschlusskosten	12	22 203	19 452
Aktive Steuerabgrenzung	42	1 508	1 526
Übrige Aktiva	13	34 632	35 196
Langfristige Vermögenswerte, die als zur Veräußerung gehalten klassifiziert werden	14	147	15
Immaterielle Vermögenswerte	15	13 100	13 090
<b>Summe Aktiva</b>		<b>711 530</b>	<b>694 447</b>
<b>PASSIVA</b>			
Erfolgswirksam zum Zeitwert bewertete Finanzpassiva	16	6 013	5 397
Verbindlichkeiten gegenüber Kreditinstituten und Kunden	17	23 109	22 425
Beitragsüberträge	18	18 212	17 939
Rückstellungen für Schäden und noch nicht abgewickelte Versicherungsfälle	19	66 566	72 540
Rückstellungen für Versicherungs- und Investmentverträge	20	404 072	390 985
Finanzpassiva aus fondsgebundenen Verträgen	21	81 064	71 197
Passive Steuerabgrenzung	42	3 178	4 035
Andere Verbindlichkeiten	22	36 883	37 392
Verbriefte Verbindlichkeiten	23	8 030	7 960
Nachrangige Verbindlichkeiten	24	11 554	11 614
<b>Summe Fremdkapital</b>		<b>658 681</b>	<b>641 484</b>
Eigenkapital		50 084	50 388
Anteile anderer Gesellschafter		2 765	2 575
<b>Summe Eigenkapital</b>	25	<b>52 849</b>	<b>52 963</b>
<b>Summe Passiva</b>		<b>711 530</b>	<b>694 447</b>

Abbildung 5.7: Bilanz 2013 der Allianz Gruppe (Quelle: www.allianz.com).

**LI 125** **Regulatorisches Kapital und Versicherungen:** Erkläre, was (regulatorische) Eigenkapitalanforderungen in Bezug auf Versicherungen sind. Gehe kurz auf Solvency II ein.

Um sicherzustellen, dass Versicherungen anfallende Versicherungsleistungen vollständig leisten können, werden regulatorische Mindestanforderungen gestellt, denen Versicherungen nachkommen müssen. Da das Ziel die nachhaltige Zahlungsfähigkeit von Versicherungsunternehmen ist, sind solche Regeln auch als **Solvabilitätsanforderungen** bekannt. Das letztentwickelte Regelpaket der EU trägt den Namen **Solvency II**, basiert auf der Richtlinie 2007/143 der EU und wird in den nächsten Jahren umgesetzt werden. Im Speziellen sieht das Regelwerk einen 3-Säulen-Ansatz vor (vgl. Abbildung 5.9):

1. **Kapitalanforderungen:** die Höhe des Eigenkapitals einer Versicherung darf eine gewisse Summe nicht unterschreiten. Das Eigenkapital dient als Puffer, falls es zu unerwartet hohen Schadensleistungen kommt und die Rückstellungen (auch: Reserven) nicht ausreichen, um diese Leistungen abzudecken.<sup>9</sup> Die Solvenzkapitalanforderung ist dabei so gesetzt, dass die Versicherung in 99,5% aller Fälle die Schadenszahlungen vollständig über Rückstellungen und Eigenkapital abdecken

<sup>9</sup>Im Besonderen spricht Solvency II von einem *Minimum Capital Requirement* (MCR; auch Minimumsolvenzkapital) und einem *Solvency Capital Requirement* (SCR; auch: Zielsolvvenzkapital). Es ist auch wichtig zu definieren, welche Instrumente als Eigenkapital im Sinne der Solvabilitätsanforderungen gewertet werden können. Details können unter [ec.europa.eu/internal\\_market/insurance/solvency](http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/solvency) nachgelesen werden.

Assets (Aktiva)	Liabilities (Passiva)
<ul style="list-style-type: none"> <li>A. Subscribed capital unpaid</li> <li>B. Intangible assets</li> <li>C. Tangible assets and investments in affiliated                             <ul style="list-style-type: none"> <li>1. land and buildings</li> <li>2. shares in affiliated/participations</li> </ul> </li> <li>D. Other financial investments:                             <ul style="list-style-type: none"> <li>1. Shares/variable yield securities/units</li> <li>2. FI securities</li> <li>3. Participation in investment pools.</li> <li>4. Deposits with credit institutions.</li> </ul> </li> <li>E. Investments for the benefit of PH*</li> <li>F. Debtors (Receivables)                             <ul style="list-style-type: none"> <li>1. from insurance operations (PHs*/intermediaries)</li> <li>2. from re-insurance</li> <li>3. Other</li> </ul> </li> <li>G. Other assets                             <ul style="list-style-type: none"> <li>1. Cash</li> <li>2. Others, not listed above</li> <li>3. Own shares</li> </ul> </li> <li>H. Prepayments and accrued income                             <ul style="list-style-type: none"> <li>1. Accrued interest and rent</li> <li>2. Deferred acquisition costs (life vs. non-life)</li> <li>3. Others</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>A. Capital and reserves                             <ul style="list-style-type: none"> <li>1. Subscribed capital or equivalent funds</li> <li>2. Share premium account.</li> <li>3. Revaluation reserve                                     <ul style="list-style-type: none"> <li>- Reserve</li> <li>- Profit or loss brought forward</li> <li>- Profit or loss for the financial year</li> </ul> </li> </ul> </li> <li>B. Subordinated liabilities</li> <li>C. Technical provisions (all (a) gross, and (b) reinsurance)                             <ul style="list-style-type: none"> <li>1. Provision for unearned premiums:</li> <li>2. Life assurance provision:</li> <li>3. Claims outstanding:</li> <li>4. Provision for bonuses and rebates</li> <li>5. Other technical provisions</li> </ul> </li> <li>D. Technical provisions for life -assurance policies where the investment risk is borne by the policyholders:</li> <li>E. Provisions for other risks and charges                             <ul style="list-style-type: none"> <li>1. for pensions and similar obligations</li> <li>2. for taxation</li> </ul> </li> <li>F. Deposits received from reinsurers</li> <li>G. Creditors                             <ul style="list-style-type: none"> <li>1. direct insurance/reinsurance</li> <li>2. to credit institutions</li> <li>3. tax, social security</li> </ul> </li> <li>H. Accruals and deferred income</li> </ul>

\*PH = Policy holder  
 Tangible=Materiell, Intangible=Immateriell, Receivables=Forderungen, Prepayments/Accruals=Rechnungsabgrenzung, Capital=Eigenkapital (inkl. Rücklagen), Provisions=Reserven (Rückstellungen), Creditors=Verbindlichkeiten

Abbildung 5.8: Bilanzstruktur eines Versicherungsunternehmens gem. EU Richtlinie 91/674/EEC.

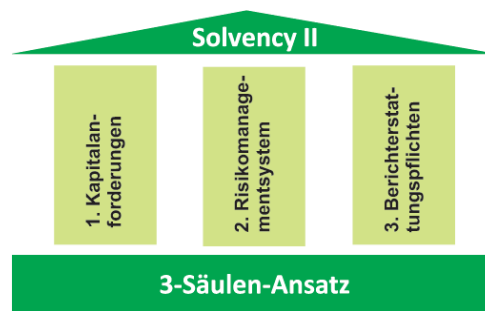


Abbildung 5.9: Die drei Säulen von Solvency II.

kann (die Kapitalanforderung entspricht somit dem 99,5%-Value-at-Risk; in anderen Regulierungssystemen, z.B. in der Schweiz ('Swiss Solvency Test'), basieren die Solvenz Kriterien auf anderen Risikomaßen.). Die Wahrscheinlichkeit von 99,5% soll alle Risiken berücksichtigen, denen die Versicherung ausgesetzt ist. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit erfolgt über ein (a) intern entwickeltes und genehmigtes Modell oder (b) auf einem vom Regulator vorgeschlagenen Standardmodell.

2. **Risikomanagementsystem:** das Regelwerk beinhaltet Mindestanforderungen an die Risikomanagementsysteme der Versicherung. Dabei geht es z.B. beim Management des operationellen Risikos auch darum, die Qualifikation von Schlüsselpersonen, wie der Vorstände, sicherzustellen (die sogenannten *fit-and-proper*-Kriterien).
3. **Berichterstattungspflichten:** um die Finanzlage und das Risikoprofil von Versicherungen ausreichend bewerten zu können, ist es auch wichtig, Mindestanforderungen an die (a) der Öffentlichkeit und (b) der Aufsicht zu Verfügung gestellten Informationen zu setzen.

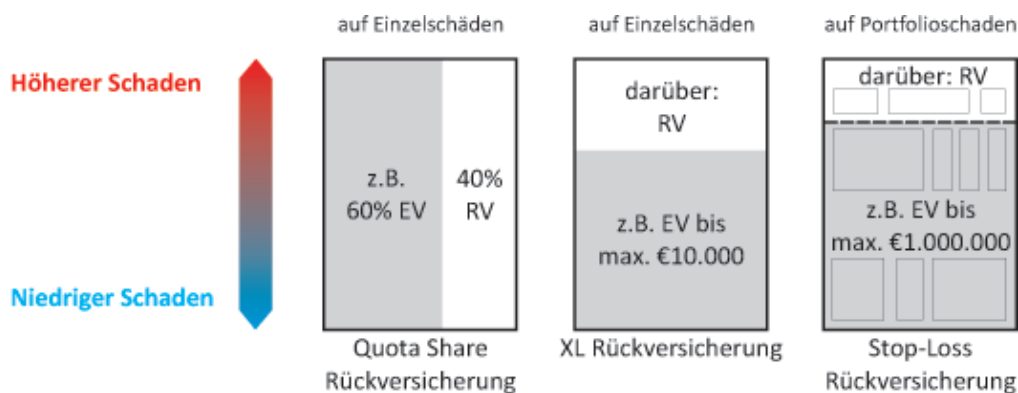
Ein einheitliches Regelsystem innerhalb der EU ist auch deshalb wichtig, weil in einem Mitgliedsland zugelassene Versicherungen auch in anderen Mitgliedsstaaten geschäftlich aktiv sein dürfen (diese au-

tomatische Zulassung in anderen Staaten nennt man *Passporting*). Die Solvency II Richtlinie wird über die jeweils lokalen Gesetzgebungen umgesetzt und die Einhaltung der Regeln wird von der jeweiligen Versicherungsaufsicht sichergestellt.

**LI 126 Risiko- und Kapitalmanagement für Versicherungen:** Erkläre (a) die Rückversicherung und (b) Verbriefung als Möglichkeiten des aktiven Risiko- bzw. Kapitalmanagements bei Versicherungen.

Rückversicherungen (RV), wie Munich Re, Swiss Re, Hannover Re oder SCOR, bieten Versicherungen (Anmerkung: in der Folge *Erstversicherer* (EV) genannt) die Möglichkeit an, Teile ihres Versicherungsportfolios wiederum zu versichern. Dies bietet den Erstversicherern die Möglichkeit, gewisse Risikoteile des Portfolios zu kaufen, zu verkaufen, oder zusätzliche Geschäftskapazität mit Hilfe des Rückversicherers als Risikopartner zu generieren. Insofern ist Rückversicherung (auf Einzelschadensbasis) der Syndizierung von Krediten ähnlich (vgl. LI 120). Die Möglichkeiten des Risikomanagements werden klarer, wenn man sich, wie in Abbildung 5.10 dargestellt, einige konkrete Standardstrukturen des Rückversicherungsgeschäfts ansieht. Dazu nehmen wir jeweils an, dass der Erstversicherer ein Portfolio bestehend aus  $n$  Einzelversicherungsverträgen (bzw. Einzelrisiken  $R_i$ ) versichert. Die Summe der Schäden beträgt  $S = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ , und diese muss gemeinsam vom Erstversicherer (Summe:  $S_{EV}$ ) und vom Rückversicherer (Summe:  $S_{RV}$ ) getragen werden, also  $S = S_{EV} + S_{RV}$ .

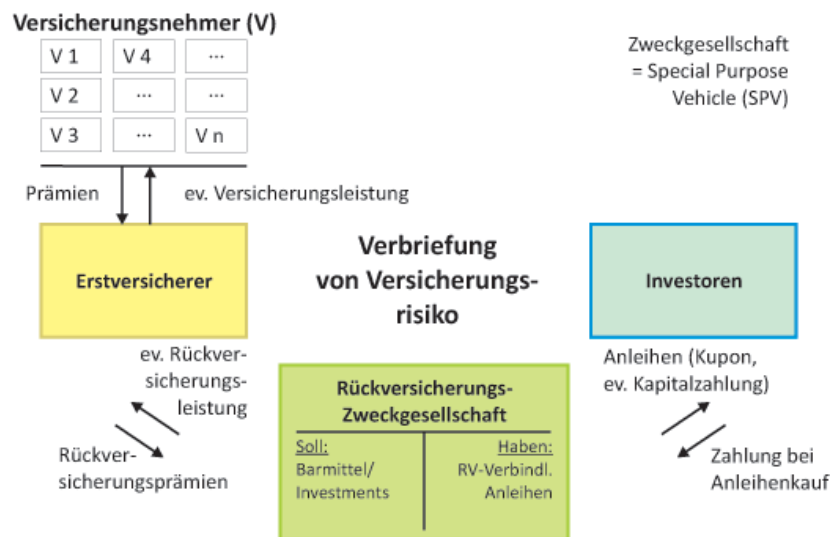
- **Quota-Share Rückversicherung:** der Rückversicherer trägt einen fixen Prozentsatz jedes Einzelschadens, z.B. 40%. Dann trägt der Rückversicherer vom Schaden des  $i$ -ten Versicherungsvertrags  $0,4 \cdot R_i$ , und dem Erstversicherer bleiben  $(1 - 0,4) \cdot R_i$ . Damit ergibt sich insgesamt  $S_{EV} = 0,6 \cdot S$  und  $S_{RV} = 0,4 \cdot S$ .
- **Excess-of-Loss (XL) Rückversicherung:** der Rückversicherer trägt von jedem Schaden jenen Teil, der über eine Grenze  $D$  hinausgeht.<sup>10</sup> Daher trägt der Rückversicherer  $\max(R_i - D; 0)$  des  $i$ -ten Schadens und dem Erstversicherer bleiben  $\min(R_i; D)$ . Es ergibt sich  $S_{EV} = \sum_{i=1}^n \min(R_i; D)$  und  $S_{RV} = \sum_{i=1}^n \max(R_i - D; 0)$ .
- **Stop-Loss Rückversicherung:** der Rückversicherer trägt jenen Teil des Gesamtschadens des Portfolios, der über eine Grenze  $C$  hinausgeht. Damit gilt  $S_{EV} = \min(C; \sum_{i=1}^n R_i)$  und  $S_{RV} = \max((\sum_{i=1}^n R_i) - C; 0)$ .



**Abbildung 5.10:** Schadenteilung bei verschiedenen Rückversicherungsarten zwischen dem Erstversicherer (EV) und dem Rückversicherer (RV): Quota Share (links), XL (Mitte) und Stop-Loss (rechts).

<sup>10</sup>In der Praxis deckelt die Rückversicherung oft die Auszahlung pro Vertrag mit einem Maximum  $C$ , alternativ könnte auch die Gesamtauszahlung nach oben hin begrenzt werden.)

Auch nach der Rückversicherung besteht ein gewisses Risiko für die Erstversicherung: der Rückversicherungsschutz ist nicht (in voller Höhe) gegeben, wenn der Rückversicherer ausfällt, das heißt, nicht mehr alle anstehenden Rückversicherungsleistungen auszahlen kann. Alternativ kann der Erstversicherer auch Versicherungsrisiko *verbriefen*: dabei wird eine neue Rückversicherungsfirma als Zweckgesellschaft (SPV) gegründet. Ihr einziger Zweck besteht darin, Rückversicherungsschutz des Erstversicherers zu gewährleisten. Das SPV wird durch den Verkauf von Anleihen an Investoren finanziert. Die Kapitalrückzahlung der Anleihe hängt davon ab, wie hoch die Rückversicherungsleistungen sind, die das SPV an den Erstversicherer leisten muss. Die Anleiheninvestoren bekommen somit eine geringere Rückzahlung, wenn die Rückversicherungsleistungen höher ausfallen - damit sind sie risikotechnisch selbst zu Rückversicherern geworden. Im Gegenzug kann der Kupon der Anleihe höher ausfallen als bei anderen gängigen Anleihen, und das Risiko korreliert relativ gering mit anderen Marktrisiken (z.B. Schwankungen von Aktienpreisen oder Preisen von Unternehmensanleihen). Diese Eigenschaft kann Investoren bei der Diversifikation ihres Portfolios helfen. Die Anleihen sind auch unter dem Namen **Insurance-Linked Securities** bekannt: die Struktur ist jener im Fall von Kreditverbriefungen sehr ähnlich und in Abbildung 5.11 schematisch dargestellt.



**Abbildung 5.11:** Schematische Darstellung von Insurance-Linked Securities Transaktionen über die Gründung eines Rückversicherungs-SPVs.



**92** Ein Erstversicherer erfährt die folgenden Schäden (bzw. Versicherungsleistungen) in einem Versicherungsportfolio:  $R_1 = 12$ ,  $R_2 = 14$ ,  $R_3 = 7$ ,  $R_4 = 21$  und  $R_5 = 16$ . Nimm an, dass der Erstversicherer zu Beginn der Periode (a) eine Quota-Share-Rückversicherung (RV) mit 40% an den Rückversicherer, (b) eine XL-Rückversicherung mit einer Grenze (pro Vertrag) von  $D = 15$  oder eine (c) Stop-Loss-Rückversicherung mit einer Grenze von  $C = 40$  abschließt. Entscheide für jeden Fall, welche Summe der Erst- bzw. der Rückversicherer tragen muss.

**Lösung:** Wir berechnen  $S = 12 + 14 + 7 + 21 + 16 = 70$ . Im Fall (a) trägt der Erstversicherer  $S_{EV} = 0,6 \cdot 70 = 42$  und der Rückversicherer bezahlt  $S_{RV} = 70 - 42 = 28$ . Im Fall (b) trägt der Rückversicherer jeweils jenen Teil der Einzelverluste, der 15 übersteigt. Damit gilt  $S_{RV} = 0 + 0 + 0 + 6 + 1 = 7$  und  $S_{EV} = 70 - 7 = 63$ . Schlußendlich ergibt sich im Fall (c), dass  $S_{RV} = 70 - 40 = 30$  und  $S_{EV} = 40$ .

Obgleich die kennzahlenbasierte Unternehmenssteuerung ein Aufbauthema darstellt, wollen wir uns kurz drei oft betrachteten Kennzahlen im Bereich *Nicht-Leben* widmen. Dabei werden alle Kenngrößen auf die verdienten Prämien bezogen:<sup>11</sup>

- Die **Leistungsquote** oder **Claims ratio** setzt Schadenaufwendungen (inkl. Reserven- bzw. Rückstellungsveränderung) in Bezug zu den verdienten Prämien:

$$\text{Claims Ratio} = \frac{\text{Schadenaufwendungen} + \text{Rückstellungsveränderung}}{\text{Verdiente Prämien}}$$

- Die **Kostenquote** oder **Expense Ratio** setzt die Kosten für die Akquisition, das Underwriting und das Servicing von Versicherung in Bezug zu den verdienten Prämien:

$$\text{Expense Ratio} = \frac{\text{Direkte Kosten des Versicherungsgeschäfts}}{\text{Verdiente Prämien}}$$

- Zählt man die beiden Quoten zusammen, so erhält man die **Combined Ratio**:

$$\begin{aligned} \text{Combined Ratio} &= \frac{\text{Schadenaufwendungen} + \text{Rückstellungsveränderung} + \text{Kosten}}{\text{Verdiente Prämien}} \\ &= \text{Claims Ratio} + \text{Expense Ratio}. \end{aligned}$$

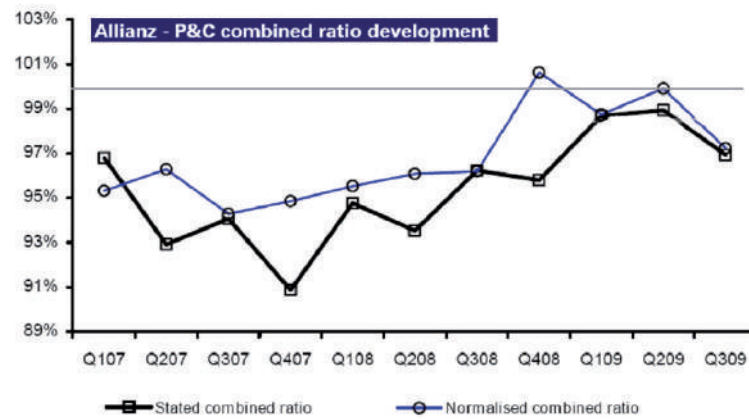
Zum einen beschreibt *Claims Ratio* das (versicherungstechnische) Risiko, mit den Prämien die Leistungen nicht abdecken zu können. Die *Expense Ratio* gibt Auskunft, wie kosteneffizient das Unternehmen das Versicherungsgeschäft betreibt. So wird die Expense Ratio ähnlicher Versicherungsunternehmen oft verglichen, um operatives Einsparungspotenzial aufzudecken. Schlussendlich gibt die *Combined Ratio* an, ob die versicherungstechnischen Kosten durch die Prämien ausreichend gedeckt sind. Nicht eingerechnet sind hier normalerweise Renditen aus den Investmentaktivitäten der Versicherung (zwischen der Zahlung der Prämie und der Ausbezahlung von Leistungen), sowie Steuern oder sonstige Ergebnisse. Die *Combined Ratio* fällt in entwickelten Märkten durch die bessere Einschätzbarkeit des Risikos und den Konkurrenzdruck meist höher aus, als in nicht so entwickelten (sowohl geographisch, als auch produkttechnisch). Ist eine Combined Ratio langfristig über 100%, so (a) steht vermutlich eine Prämienhöhung an (es treten vermehrt oder teurere Schäden auf, oder die Prämie war zu niedrig angesetzt), oder (b) die Versicherung kann gute Investorserträge generieren, die versicherungstechnische Verluste ausgleichen (z.B. in Zeiten hoher Zinsen). Abbildung 5.12 zeigt die relativ hohe Combined Ratio des Schadengeschäfts der Allianz SE (Ticker: ALVG.DE) über den Zeitraum 2007 bis 2009.



**93** Ein Versicherungsunternehmen nimmt zu Beginn eines Geschäftsjahrs 100.000 an Prämien ein. 80% dieser Prämien bieten Versicherungsschutz für ein Jahr, 20% für zwei Jahre. Über das Jahr entstehen Schadenaufwendungen von 51.000. Zusätzlich werden die Rückstellungen um 9.000 nach oben angepasst. Kosten für die Verwaltung, das Versicherungspersonal, die Systemwartung und den Vertrieb belaufen sich auf 32.000. Die Investition der Prämien bis zur Leistungsauszahlung bringt zusätzlich 7.000. Berechne die Combined Ratio dieser Versicherung für das Geschäftsjahr.

**Lösung:** Wir beziehen uns auf *verdiente Prämien*, also Prämien für Versicherungsschutz im

<sup>11</sup>Die hier gewählten Definition sind *brutto*, also vor Rückversicherung. Man kann dieselben Kennzahlkonstruktionen auch auf *Nettowerte*, also nach Rückversicherung, anwenden.



**Abbildung 5.12:** Combined Ratio des Schadenversicherungsgeschäfts (P&C=Property and Casualty) der Allianz SE 2007-09 (Quelle: Deutsche Bank Research, Unternehmensdaten, 'Normalised'=Anteilige Einrechnung von Katastrophenschäden).

besagten Geschäftsjahr. Somit berücksichtigen wir ein verdientes Prämienvolumen von  $80.000 + 50\% \cdot 20.000 = 90.000$ . Eine Anpassung der Rückstellungen nach oben verursacht Kosten, sodass der Wert mit einem positiven Vorzeichen in die Combined Ratio eingeht. Generierte Erträge aus Investitionstätigkeiten werden nicht im versicherungstechnischen Ergebnis bzw. der Combined Ratio berücksichtigt. Die Combined Ratio liegt somit bei

$$\text{Combined Ratio} = \frac{51.000 + 9.000 + 32.000}{90.000} = 102,2\%$$

### 5.2.1 Zusatzthemen Versicherung: Asymmetrische Information, Adverse Selektion, Moral Hazard

Die folgenden ökonomischen Konzepte sind nicht nur im Bank- bzw. Versicherungsbereich relevant, sondern auch in vielen anderen wirtschaftlichen Bereichen. Im Groben geht es darum, dass zwei Kooperationspartner/inne/n (a) zum einen nie vollständige Information über die Situation ihres/ihrer Partners/Partnerin zur Verfügung steht und (b) auch bei gemeinsamen Projekten unterschiedliche Ziele verfolgen können, was den Projektausgang beeinträchtigen kann. Zum Beispiel kennt ein Versicherungsnehmer sein eigenes Risiko besser als das Versicherungsunternehmen, hat aber einen Anreiz, Informationen, die zu einer Prämienhöhung führen könnten, dem Versicherungsgeber nur bedingt zu kommunizieren. Weiters ändert sich das Interesse des Versicherten, Schäden zu verhindern, sobald solche vollständig durch einen Versicherungsschutz abgedeckt sind (wir haben das bereits bei Selbstbehalten diskutiert, vgl. LI 106). Die hier diskutierten Ideen sind so wichtig, dass schon zwei Mal ein Nobelpreis der Ökonomie im Themengebiet der asymmetrischen Information vergeben wurde (Mirrlees/Vickrey 1996, Akerlof/Spence/Stiglitz 2001). Wir verzichten bei den Erklärungen auf komplizierte Modelle, vielmehr geht es darum, sich die Phänomene zu vergegenwärtigen und im Bank- bzw. Versicherungsalltag zu erkennen und z.B. durch vertragliche Konstruktionen adressieren zu können.

**LI 128** **Asymmetrische Information:** Erkläre das Konzept der asymmetrischen Information. Wo tritt asymmetrische Information im Versicherungsgeschäft auf?

In einfachen ökonomischen Modellen wird oft angenommen, dass jeder Marktteilnehmer vollständig

über die anderen Marktteilnehmer informiert ist und dann basierend auf dieser Information Entscheidungen treffen kann. Manchmal ist es leistbar, Information zu kaufen (z.B. statistische Informationen im Internet), manchmal kann Informationsbeschaffung (zu) teuer sein (z.B. Privatdetektiv). In der Regel wissen deshalb verschiedene Marktteilnehmer nicht alles über die jeweils anderen, sodass wir es meist mit dem Fall der **asymmetrischen Information** zu tun haben.



**94** Finde Beispiele für Situationen asymmetrischer Information in deinem alltäglichen Leben.

**Lösung:** (1) Beim Kauf eines Lebensmittels hat der Produzent bzw. Händler mehr Informationen über die Zusammensetzung der Zutaten, die Produktionskosten und die Beliebtheit bei Konsumenten als eine Kundin, die überlegt, dieses Produkt zu kaufen. (2) Eine Person möchte bei der Bank A einen Kredit aufnehmen und versichert der Kundebetreuerin, dass ihre Erwerbstätigkeit gesichert ist und sonst keine größeren Kosten in nächster Zeit auf sie zukommen. Die Betreuerin muss aufgrund der belegten Daten entscheiden, ob der Kredit genehmigt wird, kann aber nicht alle Angaben (besonders die nicht oder nur schwer belegbaren) verifizieren. (3) Beim Kauf eines Gebrauchtwagens versichert der Verkäufer, dass der Wagen in bester Ordnung ist. In Wirklichkeit gab es Probleme mit dem Wagen in der Vergangenheit und er musste mehrmals repariert werden. Der Kunde weiß dies beim Kauf des Gebrauchtwagens nicht. (4) Eine Patientin kommt zu einer Untersuchung und ihr wird versichert, dass eine teure Operation die bestmögliche Chance auf Heilung darstellt. Sie kann dies nicht objektiv verifizieren. Die Einholung einer unabhängigen ärztlichen Zweitmeinung kann aber ihren Informationsstand verbessern.

Die Versicherung gibt uns ein klassisches Beispiel asymmetrischer Information. Der Versicherer versucht das genaue Risikoprofil einer Kundin zu bestimmen. Einige Angaben sind, z.B. im Rahmen einer medizinischen Untersuchung, überprüfbar. Andere Angaben, wie das Fahrverhalten im Verkehr, das Verhalten in Risikosituationen, der subjektive Gesundheitszustand oder vergangene Schadensfälle lassen sich oft nur schwer oder gar nicht verifizieren. Der Versicherer muss trotzdem eine Entscheidung treffen, (a) ob und, wenn ja, (b) zu welchen Konditionen (z.B. Prämie, Selbstbehalt) Versicherungsschutz gegeben wird.

**LI 129** **Adverse Selektion:** Was ist adverse Selektion? Wie wirkt sich adverse Selektion auf das Angebot von Versicherungsschutz aus? Welche Lösungsansätze gibt es?

**Adverse Selektion** lässt sich gut an einem Beispiel, entnommen aus dem Aufsatz 'The market for lemons' von George A. Akerlof (1970) [3], erklären. Gebrauchtwagen, für die sich nach dem Kauf herausstellt, dass sie eine schlechte Qualität bzw. technische Probleme aufweisen, werden in den USA als 'Lemons' bezeichnet. Dazu der folgende Vorgang:

- Betrachte einen Markt für Gebrauchtwagen mit identischen Spezifikationen (z.B. BMW 116i 120PS mit Erstzulassung 2008 und vergleichbar viel gefahrenen km). Kunden für Gebrauchtwagen wissen statistisch, dass sich ein Prozentsatz  $q_1$  (z.B. 15%) der angebotenen Gebrauchtwagen nach dem Kauf als *Lemons* entpuppt. Der faire Preis für einen Gebrauchtwagen *von guter Qualität*, der keine Lemon ist (mit Wahrscheinlichkeit  $(1 - q_1)$ ), sollte bei z.B.  $p_1 = €7.000$  liegen.
- Die Kunden sind nun dem Problem der *asymmetrischen Information* ausgesetzt. Bei den Preisverhandlungen weiß der Verkäufer (der z.B. über viele Jahre mit dem Wagen gefahren ist) mehr über ein spezielles Auto als der potenzielle Käufer. Der Käufer ist sich dieses Risikos bewusst, und bezahlt daher höchstens einen Preis  $p_2$  (z.B. €6.000), der unter  $p_1$  liegt.



- Als Reaktion verkaufen Verkäufer, die wissen, dass ihr Auto gute Qualität hat, nicht - der Marktpreis von €6.000 erscheint ihnen zu niedrig. Sie behalten das Auto und fahren es selbst weiter, oder sie finden einen anderen Markt, in dem sie einen besseren Preis erzielen können. Das hat zur Folge, dass der Prozentsatz schlechter Autos am Markt auf  $q_2$  (z.B.  $q_2 = 25\%$  mit  $q_2 > q_1$  ansteigt). Sobald dies bekannt wird, senken Käufer ihren Maximalpreis weiter, z.B. auf  $p_3 = €5.000$ .
- Ohne Gegenmaßnahmen setzt sich der Mechanismus fort: fallende Preise verursachen, dass die Durchschnittsqualität der gehandelten Autos sinkt. Sinkende Durchschnittsqualität der Autos verursacht weiter fallende Preise. Im Extremfall **versagt der Markt**: es kommt zu keinem Handel mehr.

Der Prozess, dass aufgrund dieses Mechanismus ein immer größerer Anteil an 'schlechten' Produkten gehandelt wird, nennt man *adverse Selektion*. Obwohl auch der Käufer im obigen Beispiel **Kontrollkosten** tragen könnte (z.B. Begutachtung des Autos durch einen unabhängigen Spezialisten, was jedoch auch nur einen Teil der asymmetrischen Information beseitigt), trägt die Kosten meist der Verkäufer eines 'guten' Produktes, der signalisieren will, dass die von ihm verkaufte Qualität besser ist, als der Durchschnitt (auch: **Signalisierungskosten**). Im Fall des Autos kann der Verkäufer eines 'guten' Autos eine Garantie über einen längeren Zeitraum ausstellen, ein Rückgaberecht einräumen oder den guten Zustand durch Dritte attestieren lassen.

Im Versicherungsbereich ist adverse Selektion ein allgegenwärtiges Problem. In den USA der 1950er und 1960er Jahre hat dies zu einem partiellen Marktversagen im Krankenversicherungsmarkt geführt, im Zuge dessen nur ca. 60% der 45-54-Jährigen und ca. 30% der über 65-Jährigen krankenversichert waren (vgl. Akerlof [3]). Das aktuelle Programm Obamacare versucht, solchen Tendenzen entgegenzuwirken. In Staaten, in denen eine Versicherungspflicht anstatt der Sozialversicherung besteht (z.B. Schweiz), besteht eine Pflicht für Versicherer Kunden anzunehmen und entsprechend eines Tarifmodells zu versichern. Oft ermöglichen Tarifmodelle mit höheren Selbstbehalten eine Möglichkeit für den Kunden sein relativ niedrigeres Risiko zu *signalisieren* - auch hier tragen die Kunden mit relativ niedrigem Risiko die Signalisierungskosten, nicht die Kunden mit relativ hohem Risiko. Im Wesentlichen werden regulatorische Maßnahmen eingesetzt, um einem eventuellen (partiellen) Marktversagen vorzubeugen.



**95** Eine Versicherung bietet ein Versicherungsprodukt an. Sie weiß, dass die Versicherungspopulation aus (a) 'guten' Risiken mit einer Schadenswahrscheinlichkeit von  $q_1 = 0,05$  und (b) schlechten Risiken mit einer Schadenswahrscheinlichkeit von  $q_2 = 0,10$  besteht. Bei Vertragsabschluss kann sie aber aufgrund von *asymmetrischer Simulation* nicht erkennen, ob ein Kunde zur Gruppe (a) oder (b) gehört, und kann so nur eine Prämie für alle Kunden anbieten. Statistisch weiß die Versicherung, dass 60% der Bevölkerung zu (a) gehört und 40% zu (b). Die ausbezahlte Versicherungssumme im Schadensfall sei 100, die Versicherung muss zur reinen Risikoprämie (pro Kunde über das gesamte Versicherungsportfolio) nach dem Erwartungswertprinzip einen Aufschlagfaktor von 60% verrechnen, um ihre Kosten zu decken. Wieviel Prozent ihres Erwartungsschaden zahlen Kunden der Gruppe (a) bzw. (b)?

**Lösung:** Der durchschnittliche erwartete Schaden pro Versichertem (über das gesamte Portfolio)

beträgt

$$\mathbb{E}[S] = 0,6 \cdot 0,05 \cdot 100 + 0,4 \cdot 0,1 \cdot 100 = 7,$$

sodass die Versicherung eine Prämie von  $P(S) = 1,6 \cdot \mathbb{E}[S] = 11,2$  verlangt. Ein Kunde der Gruppe A bezahlt somit  $11,2/(0,05 \cdot 100) = 224\%$  des erwarteten Schadens, während ein Kunde der Gruppe B  $11,2/(0,1 \cdot 100) = 112\%$  des erwarteten Schadens bezahlt. Im Vergleich leidet Gruppe A (niedriges) Risiko unter der Informationsasymmetrie (Aufschlag  $> 60\%$ ), während Gruppe B (Aufschlag  $< 60\%$ ) davon profitiert.

**LI 130** **Moral Hazard:** Was ist Moral Hazard? Warum ist Moral Hazard gerade in Verbindung mit Versicherungen ein Problem?

**Moral Hazard** in Bezug auf Versicherungsschutz umfasst *Verhaltensänderungen* des Versicherten, die nur auf der Tatsache beruhen, dass Versicherungsschutz gewährt wird.

Beispiele dafür sind (1) aggressiveres Fahren durch das Bewusstsein, dass Versicherungsschutz besteht, (2) die nicht ordnungsgemäße Wartung von Feuerschutzeinrichtungen, (3) das Betreiben gefährlicher Sportarten (Mountainbiking, Klettern, Tauchen etc.) basierend auf dem Bewusstsein, dass etwaige Unfallkosten abgedeckt sind, (4) die nachlässige Berufsausübung nach Abdeckung durch eine Rechtsschutzversicherung oder (5) die übermäßige Inanspruchnahme medizinischer Leistungen basierend auf der versicherungstechnischen Kostenabdeckung.

Wir unterscheiden (a) **Ex-ante Moral Hazard** (Verhaltensveränderung vor dem Schadenseintritt) und (b) **Ex-post Moral Hazard** (Verhaltensänderung nach dem Schadenseintritt). **Versicherungsbetrug** kann dabei als eine extreme und illegale Form von Moral Hazard gesehen werden.



**96** Gib konkrete Beispiele für (a) Ex-ante und (b) Ex-post Moral Hazard von Versicherungsnehmern an. Im Fall von Ex-ante Moral Hazard, unterscheide Handlungen die (a.1) die Eintrittswahrscheinlichkeit und (a.2) die Schadenshöhe bei Schadenseintritt beeinflussen.

**Lösung:** Die folgende Liste an Beispielen kann beliebig erweitert werden: das schnellere Fahren auf der Autobahn (a.1 und a.2), die Reparatur eines Autos bei einer befreundeten Werkstatt die teurer ist als vergleichbare Werkstätten, die nachlässige Wartung von Feuermeldern (a.1), die Auswahl einer billigeren, nicht brandsicheren Wandverkleidung (a.2), der Austausch einer Autowindschutzscheibe die noch mittels Applikation eines speziellen Harzes repariert werden könnte (b), der Nichtkauf einer Smartphone-Sicherheitshülle nach Abschluss einer Mobiltelefonversicherung (a.1 und a.2), die Nichtinstallation einer Alarmanlage (a.1) etc.

### 5.3 Referenzen und weiterführende Literatur

Zur Bank- bzw. Versicherungswirtschaftslehre sind einige (wenige) Monographien etabliert. Im deutschsprachigen Bereich können Hartmann-Wendels et al. [24] oder Schierenbeck et al. [43] genannt werden (wobei das letztere Werk einen Fokus auf die Ertragssteuerung von Banken setzt), im Versicherungsbereich beispielsweise Nguyen/Romeike [32]. Im Bereich der Versicherungsökonomie sind nur wenige Übersichtswerke vorhanden: Zweifel/Eisen [48] gibt eine umfassende Übersicht und Rees/Wambach

[39] stellt in einem kompakten Format wesentlich Ideen zur Nachfrage und zum Angebote von Versicherung vor.

Im Jahr 2010 wurde ein Medienpaket zum Thema Banken und Versicherungen von der Österreichischen Bankwissenschaftlichen Gesellschaft erstellt und von der Arbeitsgemeinschaft Wirtschaft und Schule und der WKO didaktisch aufbereitet bzw. herausgegeben, siehe AWS/WKO [5]. Das Resultat ist eine sehr gelungene und kompakte einführende Übersicht zum Bank- bzw. Versicherungsgeschäft.

Konsultationspapiere zu regulatorischen Anforderungen für Banken auf europäischer Ebene werden von der Bank for International Settlements (BIS) herausgegeben, (Basel II, Basel III; [www.bis.org](http://www.bis.org)). Das Gegenstück zur BIS aus dem Versicherungsbereich ist die European Insurance and Occupational Pension Authority (EIOPA), die umfassende Materialien zum Thema europäische Versicherungsregulierung bietet (Solvency II; [eiopa.europa.eu](http://eiopa.europa.eu)).

## 5.4 Zusammenfassung des Kapitels

Zusammenfassend haben wir in diesem Kapitel die folgenden Konzepte bzw. Inhalte erarbeitet und das Verständnis bei der Lösung von Beispielen vertieft:

- ✓ *Bank*: Definition, Übersicht des Banksektors in Österreich, Bank- vs. Kapitalmarktorientierung.
- ✓ *Volkswirtschaftliche Funktionen des Bankensektors*: direkte und indirekte.
- ✓ *Risikomanagement in der Bank*: Risikoarten, Limitsystem, Kreditderivate, Syndizierung, Verbriefung.
- ✓ *Bankbilanz*: Struktur, größte Positionen.
- ✓ *Regulatorische Eigenkapitalanforderungen*: Umfang Basel II/III, 3-Säulen, Risk-weighted Assets, Liquiditätsquoten, Überwachungsprozess, Offenlegung.
- ✓ *Versicherung*: Definition, Arten von Versicherern.
- ✓ *Volkswirtschaftliche Funktionen des Versicherungssektors*: direkte und indirekte.
- ✓ *Risikoaggregation*: aggregierte Momente, zentraler Grenzwertsatz (Approximation durch Normalverteilung), Value-at-Risk, Probleme des Value-at-Risk.
- ✓ *Versicherungsbilanz*: Struktur, große Positionen, Beitragsüberträge, Rückversicherung, Abschlusskosten.
- ✓ *Regulatorische Eigenkapitalanforderungen*: Solvency II, 99,5%-Value-at-Risk, Risikomanagementsystem, Berichterstattung.
- ✓ *Aktives Risikomanagement*: Rückversicherung (Quota-Share, XL, Stop-loss), Verbriefung (ILS).
- ✓ *Versicherungstechnische Unternehmenskennzahlen*: Claims Ratio, Expense Ratio, Combined Ratio.
- ✓ *Asymmetrische Information*

- ✓ *Adverse Selektion*: Lemons, Marktversagen, Krankenversicherung, Signalkosten (wer trägt die Kosten der Informationsasymmetrie)
- ✓ *Moral Hazard*: ex-ante (Eintritt, Schadenshöhe), ex-post (Schadenshöhe), Versicherungsbetrug.



## Kapitel 6

# Ausgewählte rechtliche Grundlagen für das Bank- bzw. Versicherungsgeschäft

### Inhalte und Lernziele

In diesem Kapitel werden einige wichtige grundlegende Rechtsthemen, die im Bank- bzw. Versicherungsbereich relevant sind, herausgegriffen. Das Kapitel vervollständigt dieses Skriptum über die Grundlagen der Bank- und Versicherungswirtschaft und ist bewusst kompakt gestaltet. Im Speziellen gehen wir näher auf die Gesetzgebung und Gerichtsbarkeit in Österreich ein, sowie auf einige Grundideen des Unternehmensrechts, unternehmerische Rechtsformen, das Konzept des österreichischen Insolvenzrechts, und Bauelemente des Banken- bzw. Versicherungsrechts. Einige Inhalte, wie beispielsweise unternehmerische Rechtsformen, sind auch besonders im täglichen Bank- bzw. Versicherungsgeschäft wesentlich, da sie z.B. Haftungsverhältnisse beeinflussen können (das kann z.B. bei der Bedienung von Kreditforderungen relevant sein).

## 6.1 Das österreichische Rechtssystem

**LI 131** Rechtsordnung: *Erkläre die Bauelemente der österreichischen Rechtsordnung.*

Die **österreichische Rechtsordnung** basiert auf einem mehrstufigen Aufbau (vgl. Abbildung 6.1). Die einzelnen Stufen (von 'oben' nach 'unten') des Aufbaus sind die folgenden:

- Die **Grundprinzipien der Verfassung**: (auch: *Baugesetze*) umfassen die Prinzipien der (a) Demokratie, (b) Republik, (c) Bundesstaatlichkeit und (d) Rechtsstaatlichkeit (vgl. Bundes-Verfassungsgesetz). Eine Änderung von Grundprinzipien bringt eine wesentliche Veränderung der Verfassung mit sich. Daher werden für Änderung der Grundprinzipien, wie sie beim Beitritt Österreichs zur EU notwendig waren, (a) eine 2/3-Mehrheit im Parlament und (b) eine einfache Mehrheit eine darauffolgenden Volksbefragung benötigt.
- **EU-Gesetzgebung**: die Europäische Union basiert auf dem Rechtsstaatlichkeitsprinzip, d.h.

alle Tätigkeiten basieren auf Verträgen (das sogenannte *EU-Primärrecht*; z.B. Vertrag über die EU, Vertrag von Maastricht, Vertrag von Amsterdam etc.), die von allen EU-Mitgliedsstaaten angenommen wurden. Für die Ausarbeitung und Durchsetzung einzelner Vorschriften ist dann die **EU-Kommission** zuständig. Vorschriften müssen üblicherweise in einem **ordentlichen Gesetzgebungsverfahren** vom **Europäischen Parlament** (direkt gewählt) und dem **EU-Rat** (Regierungen aller Mitgliedsländer) gebilligt werden.<sup>1</sup>

Auf EU-Ebene werden dabei (a) **Verordnungen** (verbindlicher Rechtsakt - alle EU-Länder müssen diesen verbindlich umsetzen), (b) **Richtlinien** (Rechtsakt, der ein Ziel definiert, das alle EU-Länder (individuell) umsetzen müssen), und (b) **Entscheidungen** (verbindlich und unmittelbar anwendbar für den entsprechenden Adressatenkreis (z.B. ein Unternehmen, ein Land etc.)) beschlossen. **Empfehlungen** von EU-Seite sind hingegen unverbindlich. Die Gesetzgebung beschränkt sich auf definierte Bereiche (z.B. Agrarwirtschaft, Verkehr, Umwelt, Finanzen) - die Liste der Bereiche wird dabei immer länger.

- **Verfassungsgesetze**: regeln wichtige Fragestellungen und stecken einen Rahmen für *einfache Gesetze* ab. Der Beschluss von Verfassungsgesetzen erfordert (a) eine Anwesenheit von mindestens 50% der Nationalratsmitglieder und (b) eine 2/3-Mehrheit der abgegebenen Stimmen.
- **Einfach Gesetze**: müssen im Rahmen der verfassungsrechtlichen Vorgaben liegen und der Beschluss eines einfachen Gesetzes erfordert (a) die Anwesenheit von mindestens 1/3 der Mitglieder im Nationalrat und (b) eine einfache Mehrheit der abgegebenen Stimmen (50%+1 der Stimmen).
- Schlussendlich dienen **Verordnungen** dazu, Gesetze weiter zu spezifizieren und (b) **Bescheide** sind Verwaltungsinstrumente, durch welche gezielt Rechte/Pflichten einzelner **Rechtssubjekte** festgestellt werden können.

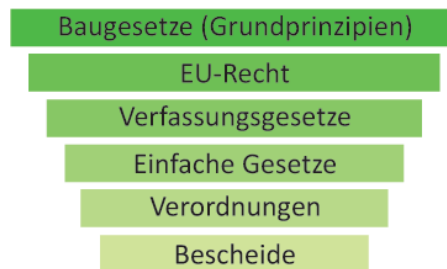


Abbildung 6.1: Aufbau der österreichischen Rechtsordnung.

Die Rechtssprechung, basierend auf den Gesetzen, erfolgt dann über die Gerichte (*Judikatur*). In Österreich entscheiden wir zwischen (a) **ordentlichen Gerichten** ((Justizstraf- und Privatrecht) und (b) **Gerichten des öffentlichen Rechts** (Verfassungs-, Verwaltungs- und Asylrecht). Wir konzentrieren uns in der Folge auf das **Privatrecht**, das die rechtliche Beziehung zwischen zwei **Rechtssubjekten** regelt. Ein *Rechtssubjekt* kann (a) eine **natürliche Person** (also: der Mensch als Rechtssubjekt; z.B. als Kreditnehmer, als Versicherungskäufer, als Investor) oder (b) eine **juristische Person** (also: eine rechtsfähige Vereinigung von Personen oder einer Vermögensmasse; z.B. eine AG die als Versicherungsunternehmen auftritt; eine Bank-GmbH) sein. Wie in Abbildung 6.2 dargestellt, umfasst das ordentliche Gerichtssystem in Österreich vier Stufen (aber maximal drei Instanzen), welche in Bezug auf das Privatrecht die folgenden Zuständigkeiten haben:

<sup>1</sup>Für weitere Informationen: [www.europa.eu](http://www.europa.eu) und [eur-lex.europa.eu](http://eur-lex.europa.eu).

- **Bezirksgerichte (BG)**: sind zuständig für Streitige Zivilprozesse (bis Streitwert: €15.000; und generell bei Ehe-, Familien-, Miet-, Pachtsachen etc.), Verfahren außer Streitsachen (Obsorge, Unterhalt, etc.), Exekutionen und Insolvenzverfahren von Personen und zur Führung des Grundbuchs.
- **Landesgerichte (LG)**: erste Instanz für alle Zivilrechtsachen, die nicht vom BG abgedeckt werden. Sind außerdem zuständig für Unternehmensinsolvenzen, die Führung des Firmenbuchs (Ausnahme: Wien - Handelsgericht) und Berufungen/Beschwerden gegen Urteile der BG ('zweite Instanz').
- **Oberlandesgerichte (OLG)**: zuständig für Berufungen/Rekurse gegen in erster Instanz ergangene Urteile am LG. Das OLG Wien ist die erste Instanz in Kartellrechtssachen für ganz Österreich. Es gibt nur vier OLG in Österreich: in Graz, Innsbruck, Linz und Wien.
- **Oberster Gerichtshof (OGH)**: entscheidet generell als dritte und letzte Instanz über Revisionen (bzw. Revisionsrekurse) gegen Urteile (bzw. Beschlüsse) der LG/OLG in zweiter Instanz.

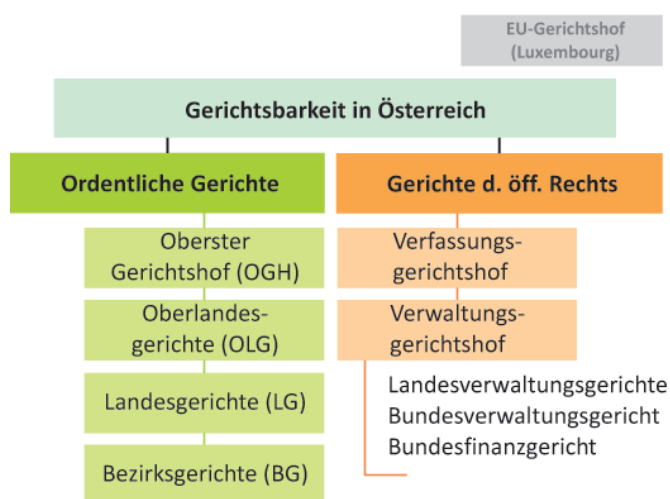


Abbildung 6.2: Aufbau der Gerichtsbarkeit in Österreich (Stand: 05/2014).

**LI 132** **Privatrecht:** Welche Rechtsgebiete sind im Privatrecht enthalten? Gib einen kurzen Überblick über das **allgemeine Privatrecht** (auch: bürgerliche Recht). Welches Spektrum deckt das ABGB ab?

Wie in Abbildung 6.3 dargestellt, unterscheidet man grundsätzlich zwischen (a) **Privatrecht** und (b) **öffentlichem Recht** (das Strafrecht ist Teil des öffentlichen Rechts, wird aber meist getrennt behandelt). Das Privatrecht regelt die rechtlichen Beziehungen der Einzelnen zueinander; das öffentliche Recht deckt jene Beziehungen ab, in denen mindestens ein Hoheitsträger auftritt (d.h. Staat vs. Einzelner, oder Staat vs. Staat). Es existieren aber auch andere Abgrenzungsdefinitionen, sodass die Zuordnung rechtlicher Thematiken zu einem dieser Bereiche nicht immer ganz klar ist. Wir werden die kompakte Rechtsübersicht in diesem Kapitel im Wesentlichen auf das Privatrecht beschränken. Ein zentraler Teil des Privatrechts ist das **allgemeine Privatrecht** (auch: bürgerliches Recht, Zivilrecht), das im Wesentlichen durch das **allgemeine bürgerliche Gesetzbuch (ABGB)** geregelt wird.

Das ABGB umfasst:

- einen allgemeinen Teil/das **Personenrecht** (§§ 1-43): definiert Grundlagen, natürliche/juristische Personen, das Eingehen von privatrechtlichen Vertragsbeziehungen ('Selbstbestimmungsrecht'),

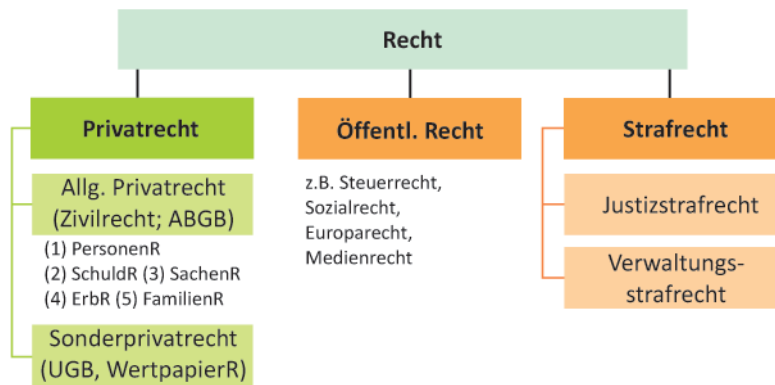


Abbildung 6.3: Privatrecht und öffentliches Recht (inkl. Strafrecht)

Stellvertretungen (z.B. Vollmachten), Fristen und Termine, sowie Verjährung (generell im ABGB: 30 Jahre, Spezialregelungen existieren).

- das **Familienrecht** (§§ 44-284): umfasst das Eherecht, die rechtliche Regelung der Eltern-Kinder-Beziehung und die Obsorge anderer Personen.
- das **Sachenrecht** (§§ 285-530): regelt die Rechtsverhältnisse an Sachen (also: die Beziehung Personen-Sache). Auch Grundstücke gehören den (unbeweglichen) Sachen an, sodass dieser Teil auch bei der Immobilienfinanzierung (und der verbundenen Besicherung mittels Grundpfandrecht) relevant ist. Wichtige Begriffe, die im Sachenrecht behandelt werden, umfassen das Eigentum, den Besitz, das Pfandrecht, Dienstbarkeiten und das Baurecht.
- das **Erbrecht** (§§ 531-824): betrifft (a) das Recht über das eigene Eigentum zum Eintritt des eigenen Todes vorab zu verfügen (also: zu vererben), und (b) das Recht, als Begünstigter einer solchen Verfügung eingesetzt zu werden (also: zu erben).<sup>2</sup>
- das **Schuldrecht** (§§ 825-1341): beschäftigt sich mit Schuldverhältnissen, d.h. mit dem Recht einer Person, eine Leistung von einer anderen Person einzufordern. Im Gegensatz z.B. zum Eigentum, betrifft das Schuldrecht nur beteiligte Parteien (z.B. den Kreditnehmer und die kreditgebende Bank).

Besonders relevant für das Bank- bzw. Versicherungsgeschäft sind dabei (a) das Eigentum und das Pfandrecht, (b) vertragsrechtliche Aspekte (wobei auch das UGB bzw. Spezialrechte, wie das Versicherungsvertragsgesetz (VersVG), zum Tragen kommen, da die Bank bzw. Versicherung ein Unternehmen ist) und (c) das Schuldrecht.

## 6.2 Unternehmens- und Insolvenzrecht

**LI 133** **Unternehmensrecht:** Erkläre den Begriff Unternehmensrecht. Gehe dabei im Speziellen auf den Umfang des Unternehmens-Gesetzbuchs (UGB) in Österreich ein.

Das Unternehmensrecht wird in Österreich im Wesentlichen über das **Unternehmensgesetzbuch 2007** (UGB) geregelt. Als *Sonderprivatrecht* gilt das UGB für den Unternehmer und unternehmensbezogene Geschäfte. Sieht das UGB keine spezielle Regelungen für einen Sachverhalt vor, so ist das

<sup>2</sup>Gedankenspiel: es wäre auch möglich, dass die Gesetzgebung in einem (anderen) Staat vorsieht, dass das Eigentum beim Eintritt des eigenen Todes auf den Staat übergeht, und dieser das Eigentum mittels Transferleistungen gezielt wieder an die Bevölkerung verteilen kann. Wie würde sich unser wirtschaftliches Handeln zu Lebzeiten dadurch ändern?



das ABGB anzuwenden. Weiters regeln das GmbH-Gesetz, das Aktien-Gesetz, das Firmenbuch-Gesetz, das Wertpapier-Gesetz oder das Bankwesengesetz ausgewählte unternehmensbezogene Bereiche.

Gem. § 1 UGB ist ein **Unternehmen** *jede auf Dauer angelegte Organisation selbstständiger wirtschaftlicher Tätigkeit, mag sie auch nicht auf Gewinn gerichtet sein*, und ein **Unternehmer** ist *wer ein Unternehmen betreibt*. Das UGB umfasst *fünf* Bücher.

Das 1. Buch umfasst den Begriff des Unternehmens (siehe oben),

- die Funktionsweise des **Firmenbuchs** (ist ein öffentlich zugängliches Register, in dem für den Geschäftsverkehr relevante Tatsachen von Unternehmen eingetragen sind. Das Firmenbuch ist heute eine elektronische Datenbank, wobei das sogenannte **Hauptbuch** die wesentlichen Daten enthält: z.B. die Firma, Rechtsform, Sitz, Geschäftsanschrift, Inhaber und bei GmbH/AG die Namen/Geburtstage der Aufsichtsratsmitglieder und das Nennkapital. Wer welche Eintragungspflichten bzw. -optionen hat, ist unter §§ 7-16 UGB nachzulesen),
- die **Firma** (sie ist der **Name**, des im Firmenbuch eingetragenen Unternehmers (nicht Unternehmens). Es gibt (a) Personenfirmer (z.B. Hans Meier & Co KG), (b) Sachfirmer (z.B. Metallwaren-GmbH) und (c) Fantasiefirmer (z.B. Red Bull AG). Der Name muss eine *kennzeichnende* und *unterscheidende* Wirkung haben, und darf nicht in die Irre führen. Die Rechtsform der Firma (z.B. KG, GmbH, AG) ist als Zusatz anzuführen),
- die **Prokura** (ist eine vom gesetzlichen Vertreter des Unternehmers oder ihm selbst ausdrücklich gewährte unternehmensrechtliche Vollmacht, die den so ausgestatteten **Prokuristen** zu allen Arten von *gerichtlichen bzw. außergerichtlichen Geschäften und Rechtshandlungen* ermächtigt. Die **Einzelprokura** wird an Einzelpersonen vergeben, bei der **Gesamtprokura** können nur mehrere Prokuristen gemeinsam handeln (Kontrollprinzip). Name/Geburtsdatum des Prokuristen, die Art der Prokura sowie der zeitliche Beginn sind im Firmenbuch eingetragen. Die Prokura kann widerrufen werden; wird der dazugehörige Eintrag aber nicht aus dem Firmenbuch gelöscht, können sich Dritte grundsätzlich auf den Eintrag verlassen)

und Handlungsvollmachten.

Die weiteren Bücher umfassen (2) das Recht der **offenen Gesellschaft** (OG) und der **Kommanditgesellschaft** (KG), d.h. den sogenannten eingetragenen Personengesellschaften, und der stillen Gesellschaft, (3) die **Rechnungslegung** von Unternehmen (eine Rechnungslegungspflicht im Sinne des UGB umfasst doppelte Buchführung, ein Inventar und den Jahresabschluss (Bilanz und Gewinn- und Verlustrechnung (GuV)), und (4) unternehmensbezogene Geschäfte (wie das Speditions- oder Lagergeschäft). Die Regelung (5) des Seehandels ist in Österreich hingegen nur wenig relevant.



**97** Recherchiere die konkrete Struktur des österreichischen Unternehmens-Gesetzbuchs (UGB), z.B. auf der Website [www.jusline.at](http://www.jusline.at). Gib einen Überblick über die Gliederung der Inhalte des Gesetzes.

**Lösung:** Das Unternehmens-Gesetzbuch ist folgendermaßen gegliedert (Stand: 2014):

1. Erstes Buch **Allgemeine Bestimmungen** (§§ 1-58): (1) Begriffe und Anwendungsbereich

(§§ 1-6), (2) Firmenbuch (§§ 7-16), (3) Firma (§§ 17-37), (4) Unternehmensübergang (§§ 38-40), Prokura und Handlungsvollmacht (§§ 48-58).

2. Zweites Buch **Offene Gesellschaft, Kommanditgesellschaft und stille Gesellschaft** (§§ 105-188): (1) Offene Gesellschaft (§§ 105-160), (2) Kommanditgesellschaft (§§ 161-177), (3) Ergänzende Bestimmung zur Gesellschaft bürgerlichen Rechts (§§ 178-188).
3. Drittes Buch **Rechnungslegung** (§§ 189-283): (1) Allgemeine Vorschriften (§§ 189-216), (2) Ergänzende Vorschriften für Kapitalgesellschaften (§§ 221-243b), Konzernabschluß und Konzernlagebericht (§§ 244-267), (4) Vorschriften über die Prüfung, Offenlegung, Veröffentlichung (§§ 268-283).
4. Viertes Buch **Unternehmensbezogene Geschäfte** (§§ 343-460): (1) Allgemeine Vorschriften (§§ 343-372), (2) Warenkauf (§§ 373-381), (3) Kommissionsgeschäft (§§ 383-405), (4) Speditionsgeschäft (§§ 407-414), (5) Lagergeschäft (§§ 416-424), (6) Frachtgeschäft (§§ 425-451), (7) Investitionsersatz (§ 454), (8) Zahlungsverzug (§§ 455-460).
5. Fünftes Buch **Seehandel** (§§ 476-908).

**LI 134** **Unternehmensformen:** Welche rechtlichen Unternehmensformen gibt es? Gehe speziell auf (a) Personengesellschaften des Unternehmensrechts und (b) Kapitalgesellschaften ein. Wie unterscheiden sich die einzelnen Unternehmensformen strukturell?

Die rechtliche Regelung der Unternehmensform wird im Wesentlichen im **Gesellschaftsrecht** geregelt. Wir werden uns hier auf ausgewählte Unternehmensformen nach dem UGB beschränken (vgl. Abbildung 6.4):

- **Offene Gesellschaft (OG):** ist eine Gesellschaft, die unter einer eigenen Firma geführt wird (Eintragung im Firmenbuch) und bei der alle Gesellschafter (Anzahl:  $\geq 2$ ) **gesamthandschaftlich** und uneingeschränkt mit ihrem Privatvermögen für Schulden der Gesellschaft haften (§ 105 UGB). Der Zusatz 'OG' muss in der Firma enthalten sein. Die OG ist rechtsfähig und somit Träger von Rechten und Pflichten. Im Innenverhältnis kommt die OG über den **Gesellschaftsvertrag** zustande, für diesen gibt es nur wenige gesetzliche Vorgaben. Die OG ist erst ab einer gewissen Umsatzgröße und wenn sie unternehmerisch tätig ist, rechnungslegungspflichtig (§ 189 UGB).
- **Kommanditgesellschaft (KG):** ist eine Gesellschaft, die unter einer eigenen Firma geführt wird und die (a) mindestens einen unbeschränkt haftenden Gesellschafter hat (auch: *Komplementär*) und (b) mindestens einen beschränkt haftenden Gesellschafter (auch: **Kommanditist** - er haftet idR bis zu seiner *Kommanditeinlage*). Die KG wird durch einen Gesellschaftsvertrag errichtet, die *Entstehung* nach außen beruht auf der Eintragung im Firmenbuch. Der Kommanditist ist generell von der Geschäftsführung ausgeschlossen, erfährt eine Gewinn-/Verlustbeteiligung im Verhältnis zu seiner Haftungssumme und nach Abgeltung der Komplementäre und hat meist erweiterte Kontrollrechte (im Vergleich zu den Komplementären). Die KG ist erst ab einer gewissen Umsatzgröße und wenn sie unternehmerisch tätig ist, rechnungslegungspflichtig (§ 189 UGB).
- **Gesellschaft mit beschränkter Haftung (GmbH):** ist eine *juristische Person* (d.h. eine eigenständige Trägerin von Rechten und Pflichten), deren Gesellschafter (Anzahl:  $\geq 1!$ ) eine **Ver-**

**mögenseinlage** an die Gesellschaft erbringen. Gesellschafter haften idR mit deren Einlage und daher **beschränkt**. Die GmbH hat stets einen **Geschäftsführer**, der an die Weisungen der **Generalversammlung** (Gesellschafter) gebunden ist. Unter gewissen Voraussetzungen (§ 29 GmbHG) wird auch ein Aufsichtsrat bestellt. Jeder Gesellschafter leistet eine **Stammeinlage** (d.h. übernimmt eine Einzahlungspflicht): die Summe ergibt das **Stammkapital** von idR mindestens €35.000 (Stand: 2014; Reduktion auf €10.000 auf Zeit ist möglich). Die GmbH hat eine generelle Rechnungslegungspflicht (aber: Erleichterungen für kleine GmbHs). Zentrale Rechtsquelle ist das GmbH-Gesetz (GmbHG), zusätzlich werden einige Aspekte über das UGB geregelt (Firmenrecht, Rechnungslegung). Die GmbH entspricht der englischen *Limited Company (Ltd)*.

- **Aktiengesellschaft (AG)**: ist eine *eigene juristische Person*, deren Gesellschafter *mit Einlagen auf das in Aktien zerlegte Grundkapital beteiligt sind*. Einzelne Gesellschafter haften *nicht* persönlich für Schulden der Gesellschaft. Vor allem für große Unternehmen, die viel Kapital benötigen, wird oft die AG als Rechtsform gewählt - das Einsammeln von Kapital von potenziell vielen Gesellschaftern (Aktionären) ist im Fall der AG oft wichtig. Es besteht nur eine geringe Bindung zwischen den Gesellschaftern und der Gesellschaft, sodass Anteile (Aktien, auch sogenannte *Wertpapiere*) leicht handelbar sind. Die Summe der Einlagen ergibt das **Grundkapital** von idR mindestens €70.000 (Stand: 2014). Der **Vorstand** tritt als *Geschäftsführer* und *rechtlicher Vertreter auf*, und ist **nicht** weisungsgebunden. Dem **Aufsichtsrat**, der von der **Aktionärsversammlung** gewählt wird, kommt eine Kontrollfunktion zu. Die AG hat eine generelle Rechnungslegungspflicht. Zentrale Rechtsquelle ist das Aktien-Gesetz (AktG), zusätzlich werden einige Aspekte über das UGB geregelt (Firmenrecht, Rechnungslegung). Die AG entspricht der englischen *Public Limited Company (plc)*.

Bei der OG und KG stehen die Gesellschafter im Vordergrund, sodass diese Organisationsformen auch zu den **Personengesellschaften** gezählt werden. Die GmbH und AG zählen dagegen zu den **Kapitalgesellschaften**: hier steht die Gesellschaft selbst als juristische, über Kapital verfügende 'Person' im Vordergrund, während die Gesellschafter nur indirekt über ihre Kapitaleinlagen haften. Eine oft gesehene Sonderform der KG ist die **GmbH & Co KG**. Dabei ist der einzige Komplementär eine GmbH, sodass die Haftung der Gesellschafter für die Schulden der Gesellschaft de facto beschränkt ist. Besonders bei der Kreditvergabe stellen Haftungsverhältnisse einen zentralen Punkt der Kreditrisikoanalyse dar. Damit ähnelt die GmbH & Co KG haftungstechnisch eher einer Kapitalgesellschaft als einer Personengesellschaft; somit wird sie rechtlich in einigen Bereichen auch wie eine Kapitalgesellschaft behandelt (z.B. Rechnungslegung, Geschäftsbriefe etc.). Gründe für die Wahl einer GmbH & Co KG-Struktur statt einer Kapitalgesellschafts-Struktur können u.a. im Steuerrecht zu finden sein (Einkommenssteuer vs. Körperschafts- und Kapitalertragssteuer).



**Abbildung 6.4:** Rechtsformen von Unternehmen (nach Unternehmensrecht).

**LI 135** **Personengesellschaft vs. Kapitalgesellschaft:** Fasse die Inhalte von LI 134 zusammen, indem du tabellarisch die Unterschiede der (a) Personengesellschaft und (b) der Kapitalgesellschaft gegenüberstellst. Gehe dabei auf die Anzahl der Gesellschafter, die rechtliche Regelung, die Geschäftsführung, die Haftung, die Gewinnversteuerung und die Rechtsfähigkeit ein.

Die erfragten Aspekte sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

	Personengesellschaft (OG, KG)	Kapitalgesellschaft (GmbH, AG)
Anzahl der Gesellschafter	$\geq 2$	$\geq 1$
Primäre rechtliche Regelung	UGB	GmbHG bzw. AktG und UGB
Führung der Geschäfte	durch Gesellschafter	durch angestellte Manager
Haftung	Gesellschafter haften auch mit Privatvermögen für Schulden der Gesellschaft, Ausnahme: Kommanditist (bei KG)	Gesellschaft selbst haftet für Schulden, Gesellschafter haften nur mit Kapitaleinlage
Unternehmenskontrolle	direkte Kontrollrechte der Gesellschafter	Anspruch auf Kopie des Jahresabschlusses, indirekte Kontrolle über Stimmrecht in Gesellschafterversammlung (z.B. Jahreshauptversammlung (AG)), Manager können bestellt/entlassen werden
Gewinnversteuerung	Einkommensbesteuerung der Gesellschafter	Gesellschaft: Körperschaftssteuer (auch: 'KöSt'; in Österreich (2014): 25% Steuersatz), Gesellschafter bezahlen zusätzlich Kapitalertragssteuern auf Dividenden (in Österreich (2014): 25% Steuersatz)
Rechtsfähigkeit	eingeschränkt: keine <i>juristische Person</i> , aber kann Träger von Rechten und Pflichten sein	Gesellschaft als juristische Person selbstständig rechtsfähig

**LI 136** **Insolvenzrecht:** Erkläre die gesetzlichen Regelungen im Insolvenzfall. Was ist ein Sanierungs- bzw. Konkursverfahren? Was ist die Insolvenzmasse bzw. was sind Aussonderungs- und Absonderungsansprüche? Was ist das Reorganisationsverfahren?

**Insolvenzen** sind in Österreich in der sogenannten **Insolvenzordnung** (IO) geregelt, wir konzentrieren uns hier auf die Unternehmensaspekte (und lassen das Schuldregulierungsverfahren für Privatpersonen (§§ 181ff IO) außer Acht). Die Insolvenz eines Unternehmens kann im Fall (a) einer (drohenden) **Zahlungsunfähigkeit** (§ 66 IO;  $\neq$  temporäre Zahlungsstockung) oder (b) einer **Überschuldung** (§ 67 IO) eintreten. Das zentrale Ziel ist dann die *Unternehmenssanierung*. Das **Insolvenzverfahren** wird durch (a) die Schuldnerin oder (b) einen Gläubiger beantragt, und für das Insolvenzverfahren ist das Landesgericht (bei Privatpersonen: Bezirksgericht) zuständig. Der Gläubiger kann danach den Abschluss eines **Sanierungsplans** anbieten, der jedoch einem jeden Gläubiger eine Mindestquote von

**20%** innerhalb von 2 Jahren (ab Annahme des Plans) anbieten muss. Wird dieser von der einfachen Kapital- und Kopfmehrheit der stimmberechtigten Insolvenzgläubiger<sup>3</sup> angenommen, so kommt es zum

- **Sanierungsverfahren** ohne Eigenverwaltung (§§ 166ff IO) oder mit Eigenverwaltung (§§ 169ff IO; die Mindestquote erhöht sich auf 30%).

Ein vom Gericht bestellter **Sanierungsverwalter** ('spezieller' Insolvenzverwalter) führt (bei: 'ohne Eigenverwaltung') oder überwacht (bei: 'mit Eigenverwaltung') das Sanierungsverfahren. Im zweiten Fall umfassen die Aufgaben des Sanierungsverwalters das Anfechten von Rechtshandlungen, die Forderungsprüfung, die Zustimmung zum Abschluss von Geschäften, die gerichtliche Veräußerung, die Veräußerung von Sachen mit einem Absonderungsrecht und die Aufschiebung des Exekutionsverfahrens (vgl. §§ 116-122 IO). Wird kein Antrag auf ein Sanierungsverfahren eingebracht bzw. ein solcher abgelehnt, so kommt es zum

- **Konkursverfahren** (§§ 180ff IO),

das von einem, vom Gericht bestellten **Masseverwalter** ('spezieller' Insolvenzverwalter) geführt wird. Wichtige Daten zum Insolvenzverfahren werden über die Ediktsdatei ([www.edikte.justiz.gv.at](http://www.edikte.justiz.gv.at)) publik gemacht.

**Gläubiger** melden ihre Forderungen an, und versuchen, allfällige **Absonderungsrechte** beim Insolvenzverwalter geltend zu machen (Ziel: z.B. Herausnahme verpfändeter Sachen aus der Insolvenzmasse). Absonderungsansprüche (z.B. durch Sicherstellungen) der letzten 60 Tage vor Eröffnung des Insolvenzverfahrens verfallen in der Regel. **Aussonderungsrechte**, auf Dinge, die der Schuldnerin nur teilweise oder nicht gehören, müssen ebenso angemeldet und vorab geprüft werden. Im Konkursfall wird die Masse verwertet (z.B. durch einen Verkauf oder eine Versteigerung von Unternehmensteilen oder Aktiva des insolventen Unternehmens) und die Gläubiger werden entsprechend mit einer Quote auf ihre Forderungen bedient. Dabei existieren im österreichischen Insolvenzrecht grundsätzlich *keine* bevorzugten Gläubiger auf die Masse (Ausnahme: Absonderungsberechtigte werden über Verwertung von Sachen, die von der Masse abgesondert wurden, zuerst bedient); in einigen Situationen können Gläubiger auf freiwilliger oder gesetzlicher Basis nachrangig bedient werden. Das Gericht überwacht während des gesamten Prozesses den Insolvenzverwalter (Masse- bzw. Sanierungsverwalter) und beendet schlussendlich das Verfahren. Einzelbestimmungen können im Detail in der Insolvenzordnung nachgelesen werden.

Im Gegensatz zum Insolvenzverfahren steht das **Reorganisationsverfahren** (Unternehmensreorganisationsgesetz 1997), das zur Verbesserung der Vermögens- und Finanzlage eines gefährdeten Unternehmens führen soll. In einem solchen Verfahren können Rücktrittsrechte, einseitige Vertragsauflösungen oder Kreditfälligstellungen rückgängig gemacht werden, um dem Unternehmen vorübergehend Stabilität und die Möglichkeit zu geben, wichtige Reorganisationsmaßnahmen durchzuführen.

---

<sup>3</sup>Welche bei der Sanierungsplantagsatzung anwesend sind.



**98** Recherchiere auf der Website des Österreichischen Kreditschutzverbands [www.ksv.at](http://www.ksv.at) wie viele Unternehmensinsolvenzen es pro Jahr und Bundesland über den Zeitraum 2008 bis 2013 in Österreich gab.

**Lösung:** Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl an Unternehmensinsolvenzen pro Jahr und Bundesland in Österreich über den Zeitraum 2008 bis 2013. Man sieht den deutlichen Anstieg während der Kreditkrise im Jahr 2009, das relative Fallen in den Folgejahren und dann einen nochmaligen Anstieg im Jahr 2012. Die hier gezeigten Zahlen beinhalten (a) eröffnete Konkurse und (b) Konkurse, die beantragt, aber mangels ausreichender Masse abgewiesen wurden.

	2013	2012	2011	2010	2009	2008
Wien	1.601	1.862	1.836	2.023	2.180	1.983
Niederösterreich	868	927	937	914	1.031	981
Burgenland	193	234	169	189	193	208
Oberösterreich	664	760	748	829	948	779
Salzburg	384	397	345	400	449	357
Vorarlberg	147	191	202	288	263	251
Tirol	393	380	396	458	484	462
Steiermark	789	873	837	832	894	896
Kärnten	420	417	399	443	460	398
<b>Gesamt</b>	<b>5.459</b>	<b>6.041</b>	<b>5.869</b>	<b>6.376</b>	<b>6.902</b>	<b>6.315</b>
Veränderung Vorjahr	-9,6%	2,9%	-8,0%	-7,6%	9,3%	0,3%
Insolvenzverbindlichkeiten (EUR Mrd.)	n/a	3,2	2,8	4,7	4,0	3,0

Der Kreditschutzverband stellt auch weitere interessante Statistiken zur Verfügung. Die Anzahl an bzw. das Volumen der Insolvenzfälle wird auch als *Lagging Indicator* (vgl. LI 71) verwendet, um die Konjunktur einer Wirtschaft zu beschreiben.

## 6.3 Banken- und Versicherungsrecht

**LI 137** **Überblick Bankenrecht:** *Gib einen kurzen Überblick über die in Österreich geltenden relevanten Rechtsgrundlagen des Bankgeschäfts. Gehe dabei auf das BWG ein. Welche anderen Rechtsquellen sind relevant?*

Die rechtliche Regelung des klassischen Bankgeschäfts ist in Österreich zum einen über das **Bankwesengesetz (BWG)** abgesteckt und zum anderen, mit einem Fokus auf Konsumentenschutz, über Bestimmungen des **Konsumentenschutzgesetzes (KSchG)**, des **Verbraucherkredit-Gesetzes (VKrG)** und des **Zahlungsdienstgesetzes (ZaDiG)**. Weiters ist die Beziehung Bank-Kunde privatrechtlicher Natur, sodass diese auch den allgemeinen Bestimmungen des Privat- bzw. Unternehmensrecht (ABGB, UGB) unterliegt.

Die rechtliche Regulierung des Bankensektors sichert die nachhaltige Funktion des Bankwesens als wichtigen Baustein der heutigen Volkswirtschaft (auch: *Funktionsschutz*). Andererseits soll der Schutz der Kunden gewährleistet sein (auch: *Kundenschutz-Funktion*, speziell: *Gläubigerschutz*): etwa durch die ausreichende Sicherung von Kunden-Einlagen, durch eine umfassende Kreditwürdigkeitsprüfung vor einer Kreditvergabe, oder durch eine Aufklärung über Handlungsmöglichkeiten, Risiken und die Verpflichtungen der Bank. Die Gesetzgebung in Österreich im Finanz- bzw. Bankbereich wird mitt-

lerweile auch wesentlich von EU-Verordnungen bzw. EU-Richtlinien beeinflusst.

Im Speziellen decken die folgenden Gesetze die jeweils nachfolgend beschriebenen Inhalte ab:

- **Bankwesengesetz (BWG)**: setzt sich mit der Beschreibung von Kredit- bzw. Finanzinstituten und Bankgeschäften (d.h. idR konzessionspflichtigen Einlagen-, Giro-, Kredit-, Diskont-, Depot-, Wertpapieremissions-, Bauspar-, Investment- bzw. Beteiligungsfondsgeschäften) auseinander. Die weiteren Regelungen betreffen die Sicherheit der vom Kunden überlassenen Vermögenswerte, die Hauptverwaltung und das Anfangskapital des Instituts, sowie die ordnungsgemäße Geschäftsausübung (Ordnungsnormen, Spareinlagen, Verbraucherbestimmungen, Bankgeheimnis, Sorgfaltspflicht bzw. Geldwäscherei und die Rechnungslegung).
- **Verbraucherkredit-Gesetz (VKrG)**: umfasst sämtliche Kreditverträge mit einem Gesamtkreditbetrag von mindestens €200 (Stand: 2014), im Rahmen derer ein Unternehmer als Kreditgeber und ein Verbraucher als Kreditnehmer auftritt. Das VKrG verpflichtet den Kreditgeber zu Transparenz, insbesondere legt es ihm eine umfassende Informations- ('klar und prägnant') und Dokumentationspflicht auf. Der Kreditnehmer ist einer Bonitätsprüfung vor Kreditvergabe zu unterziehen, auch hat der Kunde ein 14-tägiges Rücktrittsrecht von Kreditverträgen ohne Angabe eines Grundes. Sogenannte *verbundene Kreditverträge* (d.h. Kreditverträge, die zur Finanzierung eines Geschäfts abgeschlossen werden, z.B. Kredit zum Autokauf) werden ebenso im VKrG explizit behandelt.
- **Zahlungsdienstegesetz (ZaDiG)**: wurde im Zuge der Umsetzung der Zahlungsdienste-Richtlinie der EU, 2007/64/EEC, eingeführt, die auf eine einheitliche rechtliche Regelung und einen harmonischen Ablauf des Zahlungsverkehrs innerhalb der EU abzielt. Das ZaDiG regelt Preistransparenz und Entgelte (und: Änderungsmöglichkeiten), Änderungen bzw. Kündigungen des Rahmenvertrags, bringt günstigere Kündigungsbestimmungen, Sorgfaltspflichten für Bereitsteller/Nutzer von Systemen, Ausführungsfristen/Wertstellungen sowie Haftungsfragen. Das ZaDiG ist im Wesentlichen auf alle Zahlungsdienste, d.h. z.B. auf Barein- bzw. Barauszahlungen, Überweisungen/Daueraufträge und Internetzahlungen, anzuwenden.

Weiters versuchen Banken, (a) gängige zusätzliche Vertragspflichten, (b) Verhaltensweisen der Bank in unklaren Fällen und (c) Haftungsbeschränkungen zu Gunsten der Bank in den **allgemeinen Geschäftsbedingungen** (AGB) für Bankgeschäfte zusammenzufassen und diese zum Bestandteil der Vertragsbeziehung Bank-Kunde zu machen. Ungewöhnliche Klauseln der AGB sind jedoch nicht oder nur beschränkt gültig, wenn der Kunde/Vetragspartner (a) gröblich benachteiligt wird oder (b) sich einer Regelung nicht bewusst war und nicht mit ihr rechnen musste (wieder: Benachteiligung).



**99** Recherchiere die Struktur des österreichischen Bankwesengesetzes (BWG), z.B. kann auf der Website [www.ris.bka.gv.at](http://www.ris.bka.gv.at) der Gesetzestext nachgeschlagen werden. Gib einen Überblick über die Gliederung der Inhalte des Gesetzes.

**Lösung:** Das Bankwesengesetz ist folgendermaßen gegliedert (Stand: 2014):

1. **Allgemeine Bestimmungen** (§§ 1-3): Kredit- und Finanzinstitute (§ 1), Begriffsbestimmungen (§ 2), Ausnahmen (§ 3).

2. **Konzession** (§§ 4-7a), **Niederlassungs-/Dienstfreiheit** (§§ 9-19) und **Eigentümerbestimmungen/Bewilligungen** (§§ 20-21h).
3. **Makroprudenzielle Aufsicht** (§§ 22-24a): Bestands- und Systemgefährdung (§ 22), Systemrisikopuffer (§ 23d), Ausschüttungsbeschränkungen und Kapitalerhaltungsplan (§ 24).
4. **Ordnungsnormen** (§§ 25-30d): Liquidität (§ 25), Gesellschaftsrecht (§§ 26-27a), Organe (§§ 28-29), Gruppenbetrachtung (§§ 30-30d).
5. **Spareinlagen** (§§ 31-32): Sparerkunden (§ 31), Einzahlungen, Auszahlungen und Verzinsung (§ 32).
6. **Verbraucherbestimmungen** (§§ 33-37), Bankgeheimnis (§ 38), Geldwäscherei/Terror (§§ 39-41).
7. **Interne Revision** (§ 42), **Rechnungslegung** (§§ 43-65a), **Deckungsstock** (§§ 66-68).
8. **Aufsicht** (§§ 69-77c): Zuständigkeit, Kostenzuordnung, Veröffentlichungspflichten der FMA (§ 69), Auskunfts- und Informationseinholungsbefugnisse (§ 70), Vor-Ort-Prüfungen (§ 71), Behördl. Zusammenarbeit (§ 72), Anzeigen (§ 73), Sonstige (§§ 72-77).
9. **Einlagensicherung und Anlegerentschädigung** (§§ 93-93c).
10. **Sparvereine und Werkssparkassen** (§ 95).
11. **Verfahrens- und Strafbestimmungen** (§§ 96-101a).
12. Sonstige (§§ 78-92, 94, 103).

**LI 138** **Rechtsüberblick Vertragsversicherung:** *Gib einen kurzen Überblick über die in der Vertragsversicherung in Österreich relevanten Rechtsgrundlagen. Gehe dabei besonders auf das VersVG und das VAG ein.*

Die Vertragssversicherung basiert in Österreich rechtlich im Wesentlichen auf dem **Versicherungsvertragsgesetz** (VersVG) und dem **Versicherungsaufsichtsgesetz** (VAG). Nach mehreren Novellen in den Jahren 2000, 2005 und 2007 wird das VAG auch 2014 wieder überarbeitet um die gesetzliche Grundlage für die Versicherungsstandards nach der Solvency II-Richtlinie zu schaffen. Ähnlich wie im Bankgeschäft, ist die Beziehung Versicherungsgeber-Versicherungsnehmer in der Vertragsversicherung privatrechtlicher Natur, sodass relevante allgemeine Bestimmungen des Privatrechts (ABGB, UGB, KSchG) auch in Bezug auf das Versicherungsgeschäft zum Tragen kommen.

Im Speziellen decken die folgenden Gesetze die jeweils beschriebenen Inhalte ab:

- **Versicherungsvertragsgesetz** (VersVG): umfasst u.a. Bestimmungen, (a) wie ein Versicherungsvertrag angebahnt werden kann (z.B. durch Vermittler) und entsteht, (b) welche Rechtsbeziehung die beteiligten Rechtssubjekte eingehen, (c) welche Rechte und Pflichten die Vertragsparteien haben (z.B. Meldepflichten des Versicherten etc.) und (d) wie ein Vertrag gelöst werden kann. Somit fällt das VersVG in die Kategorie *Sonderprivatrecht* bzw. *Sondervertragsrecht*.
- **Versicherungsaufsichtsgesetz** (VAG): die ursprüngliche Fassung trat 1979 in Kraft und bildet auch heute noch eine wesentliche Basis der Versicherungsaufsicht. So sind in der heute gül-



tigen Version Eigenmittelanforderungen, die interne Kontrolle, Rückversicherung, die Stellung des Treuhänders, die Rechnungslegung, Geldwäsche- und Terrorismusbekämpfung und die Aufsicht über die einzelnen Versicherungsunternehmen geregelt. Einige Aspekte der Anforderung an Versicherungsunternehmen und der Aufsicht werden seit einigen Jahren (auch auf EU-Ebene) kritisch überarbeitet, sodass das VAG seit Österreichs EU-Beitritt regelmäßig novelliert wird.

Ähnlich zum Bankensektor versuchen auch Versicherungen, (a) gängige zusätzliche Vertragspflichten, (b) Verhaltensweisen des Versicherers in unklaren Fällen und (c) Haftungsbeschränkungen zu Gunsten des Versicherers in den **allgemeinen Geschäftsbedingungen** (AGB) für Versicherungsgeschäfte zusammenzufassen und diese zum Bestandteil der Vertragsbeziehung Versicherer-Kunde zu machen. Die allgemeinen Bedingungen können noch durch *besondere Versicherungsbedingungen* (BVB) ergänzt werden (z.B. für spezielle Sparten oder Vertragsarten). Die **Versicherungspolizze** regelt dann die vertragliche Beziehung Versicherer-Kunde im Detail.



**100** Recherchiere die Struktur des österreichischen Versicherungsvertragsgesetz (VersVG), z.B. auf der Webseite [www.jusline.at](http://www.jusline.at). Gib einen Überblick über die Gliederung der Inhalte.

**Lösung:** Das Versicherungsvertragsgesetz ist folgendermaßen gegliedert (Stand: 2014):

1. Erster Abschnitt **Vorschriften für sämtliche Versicherungszweige** (§§ 1-48): (1) Allgemeine Vorschriften (§§ 1-15), (2) Anzeigepflicht, Erhöhung der Gefahr (§§ 16-34), (3) Prämienvorschriften (§§ 35-42), (4) Versicherungsagent/Vermittler (§§ 43-48).
2. Zweiter Abschnitt **Schadenversicherung** (§§ 49-158): (1) Allgemeine Vorschriften (Vertragsinhalt, Veräußerung der versicherten Sache, Versicherung für fremde Rechnung; §§ 49-80), (2) Feuerversicherung (§§ 81-108), (3) Hagelversicherung (§§ 109-115), (4) Tierversicherung (§§ 116-128), (5) Transportversicherung (§§ 129-148), (6) Haftpflichtversicherung (allgemeine Vorschriften, besondere Vorschriften Pflichtversicherung; §§ 149-158i), (7) Rechtsschutzversicherung (§§ 158j-p).
3. Dritter Abschnitt **Lebensversicherung** (§§ 159-178).
4. Vierter Abschnitt **Krankenversicherung** (§§ 178a-n).
5. Fünfter Abschnitt **Unfallversicherung** (§§ 179-185).
6. Sechster Abschnitt **Schlussvorschriften** (§§ 186-192).

## 6.4 Referenzen und weiterführende Literatur

Als Kernliteratur dienen die Gesetzestexte selbst, diese sind z.B. unter [www.jusline.at](http://www.jusline.at) abrufbar. Der Verlag LexisNexis gibt eine große Anzahl an Rechtskripten mit umfassenden Kommentaren und Beispielen heraus: so beispielsweise zu den Themengebieten Bürgerliches Recht, Unternehmensrecht, Versicherungsvertragsrecht, Personen- bzw. Kapitalgesellschaften, Wertpapierrecht oder Insolvenzrecht (vgl. [www.lexisnexis.at](http://www.lexisnexis.at)). Zudem sind zahlreiche Fachbücher zu rechtlichen Themen im österreichischen Kontext verfügbar, wie beispielsweise Weber [47] (Unternehmens- und Gesellschaftsrecht) oder Fenyves/Koban [19] (Versicherungsrecht). Schlussendlich umfassen die verschiedenen Publikations-

reihen des Bankverlags Wien auch zahlreiche Beiträge zu den Themen Bank- bzw. Finanzmarktrecht (vgl. bankverlagwien.at bzw. bwg.at).

## 6.5 Zusammenfassung des Kapitels

Zusammenfassend haben wir in diesem Kapitel die folgenden Konzepte bzw. Inhalte erarbeitet:

- ✓ *Rechtsordnung*: Baugesetze, EU-Recht, Verfassungsgesetze, einfache Gesetze, Verordnungen und Bescheide.
- ✓ *Gerichtsbarkeit in Österreich*: Aufgaben der Bezirksgerichte (BG), Landesgerichte (LG), Oberlandesgerichte (OLG) und des Obersten Gerichtshofs (OGH).
- ✓ *Privatrecht*: Übersicht, Gliederung ABGB (Personen-, Familien-, Sachen-, Erb- und Schuldrecht).
- ✓ *Unternehmensrecht*: Beispiele relevanter Gesetze, Umfang UGB, Begriffserklärungen 'Firmenbuch', 'Firma' und 'Prokura'.
- ✓ *Unternehmensformen*: Definition und Charakteristiken von OG, KG, GmbH, AG, GmbH&Co KG, Unterscheidung Personengesellschaften vs. Kapitalgesellschaften.
- ✓ *Insolvenzrecht*: Überblick, Sanierungsverfahren vs. Konkursverfahren, Insolvenzverwalter, Insolvenzmasse, Absonderungs- und Aussonderungsrechte.
- ✓ *Bankenrecht*: Übersicht, Rechtsquellen, BWG, VKrG, ZaDiG, AGB für Bankgeschäfte.
- ✓ *Versicherungsrecht*: Übersicht, Rechtsquellen, VersVG, VAG (Solvency II geht in das VAG ein), AGB für Versicherungsgeschäfte.



# Anhang A

## Ergänzungen

### A.1 Lösungen zu den Multiple-Choice Fragen

#### A.1.1 Quantitative Methoden

(1) a,c, (2) b, (3) b, (4) b,c, (5) c, (6) a,b,d, (7) a, (8) b,d, (9) b,c,d, (10) b ( $r_c \approx 0,0596$  ist nie größer als der nominelle/effektive Zinssatz), (11) a,b,c,d, (12) a,c, (13) c, (14) b,c, (15) b (behandle Bereiche, in denen  $f(x)$  positiv bzw. negativ ist, separat), (16) a,c,d, (17) a, (18) d, (19) c, (20) a,c,d, (21) d, (22) a, (23) c, (24) b, (25) a,b (Anmerkung zu (d): gilt nur, wenn  $\mathbb{P}[X = a] = 0$ , also z.B. für stetige Zufallsvariablen  $X$ ), (26) b, (27) a, (28) a, (29) a, (30) d, (31) a,b, (32) b,c,d, (33) a,c,d, (34) a,b, (35) b,c, (36) a,b,c,d, (37) a,c,d, (38) a,b,c,d.

#### A.1.2 Applied Economics

(1) a,c (d: supply factor), (2) c, (3) a,b,c,d, (4) a,c,d, (5) a,d, (6) c, (7) a, b, (8) b, (9) c, (10) c, (11) a,c, (12) d, (13) b, (14) a,b, (15) c, (16) a,c,d, (17) a,b,c, (18) b,c,d, (19) c, (20) b, (21) d, (22) d, (23) a,b.

#### A.1.3 Ausgewählte Finanz- bzw. Versicherungsprodukte

(1) a,c,d, (2) b,c,d, (3) a,b,c,d, (4) c, (5) a,b, (6) b,c, (7) a,d, (8) d, (9) d, (10) a,c,d, (11) b, (12) d, (13) c, (14) b, (15) b, (16) c,d, (17) a,b, (18) c, (19) b,d, (20) c, (21) a,b,c,d.

#### A.1.4 Ausgewählte Grundlagen der Bank- bzw. Versicherungsbetriebslehre

(1) a,b,c,d, (2) c,d, (3) a,b,d, (4) d, (5) a,c (Anm. (b) fällt unter Marktrisiko und (d) unter Liquiditätsrisiko), (6) a, (7) a, (8) a,c, (9) a,b,c, (10) a,b, (11) a, (12) a,b,c, (13) a (mit zunehmender Anzahl an Verträgen sinkt die Durchschnittsvarianz gegen 0), (14) b (Anm. (c) spricht von Abweichungen, aber nicht in welche Richtung (zudem ist die Definition nicht  $\text{VaR}[L]$ , sondern  $\text{VaR}[L - \mathbb{E}[L]]$ : bei der Berechnung des Versicherungskapitals kommt dieses Maß oft zum Einsatz, da  $\mathbb{E}[L]$  bereits über die Rückstellungen reserviert ist), (d) gilt nur, wenn  $L$  normalverteilt ist), (15) a, (16) a, (17) b, (18) b, (19) d, (20) c, (21) a,b,c,d, (22) b,d.

### A.1.5 Ausgew. rechtliche Grundlagen für das Bank- bzw. Versicherungsgeschäft

(1) a,b, (2) c, (3) c,d, (4) a,b, (5) b,c, (6) a,b,c,d, (7) a,c,d, (8) c, (9) a,b,d, (10) a,b, (11) a,d, (12) a,b.

## A.2 Statistische Daten

### A.2.1 Prämienvolumen der globalen Versicherungswirtschaft

Die Größe der einzelnen Versicherungssektoren wird meist anhand des jeweiligen Prämienvolumens gemessen. Abbildung A.1 (Seite 193) ist aus Swiss Re [38] entnommen. Interessierten Leser/inn/en wird die Lektüre dieser Publikation als Übersicht der aktuellen Versicherungswirtschaft empfohlen.

### A.2.2 Sterbetafel Österreich 2010/2012

Der in Tabelle A.2 (Seite 194) gezeigte Auszug aus der österreichischen Sterbetafel ist den auf [www.statistik.at](http://www.statistik.at) veröffentlichten demographischen Daten entnommen. Dabei beschränken wir die Darstellung auf (a) die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten  $q(x)$  und die (b) fortlaufende Lebenserwartung eines bzw. einer  $x$ -Jährigen, getrennt nach Geschlecht.

## A.3 Verteilungsfunktion der Normalverteilung

In Tabelle A.3 (Seite 195) sind die Werte der Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung dargestellt. Dabei gilt das Folgende:

- Beispielsweise ist  $\Phi(0,73) = \Phi(0,7 \text{ (links)} + 0,03 \text{ (oben)}) = 0,7673$ .
- Umgekehrt gilt z.B., dass  $\Phi^{-1}(0,9671) = 1,8 + 0,04 = 1,84$ .
- Für negative Argumente benötigt man die folgende Transformation:  $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ .

Total business	Premium volume (in millions of USD)		Share of world market (in %)	Premiums <sup>1</sup> in % of GDP	Premiums <sup>1</sup> per capita (in USD)
	2012	2011			
<b>America</b>	<b>1 562 153</b>	<b>1 497 703</b>	<b>33.87</b>	<b>6.80</b>	<b>1 649.2</b>
North America	1 393 416	1 342 502	30.21	8.03	3 996.3
Latin America and Caribbean	168 737	155 201	3.66	3.00	281.9
<b>Europe</b>	<b>1 535 176</b>	<b>1 625 442</b>	<b>33.28</b>	<b>6.73</b>	<b>1 724.4</b>
Western Europe	1 462 718	1 553 772	31.71	7.72	2 716.3
Central and Eastern Europe	72 458	71 670	1.57	2.01	223.4
<b>Asia</b>	<b>1 346 223</b>	<b>1 278 786</b>	<b>29.19</b>	<b>5.73</b>	<b>3 217.5</b>
Advanced Asian markets	935 958	892 195	20.29	11.80	4 387.5
Emerging Asia <sup>2</sup>	369 364	346 816	8.01	2.96	101.9
Middle East and Central Asia	40 901	39 775	0.89	1.35	124.0
<b>Africa</b>	<b>71 891</b>	<b>69 274</b>	<b>1.56</b>	<b>3.65</b>	<b>67.3</b>
<b>Oceania</b>	<b>97 071</b>	<b>94 958</b>	<b>2.10</b>	<b>5.60</b>	<b>2 660.2</b>
<b>World<sup>3</sup></b>	<b>4 612 514</b>	<b>4 566 163</b>	<b>100.00</b>	<b>6.50</b>	<b>655.7</b>
Advanced markets <sup>4</sup>	3 889 836	3 885 801	84.33	8.59	3 677.3
Emerging markets <sup>5</sup>	722 678	680 363	15.67	2.65	120.2
OECD <sup>6</sup>	3 819 652	3 828 335	82.81	8.06	2 957.0
G7 <sup>7</sup>	2 977 531	2 972 551	64.55	8.71	3 910.1
Euroland	987 518	1 069 711	21.41	7.41	2 719.5
EU, 27 countries	1 402 293	1 494 861	30.40	7.70	2 533.4
NAFTA <sup>8</sup>	1 417 399	1 365 365	30.73	7.65	3 048.3
ASEAN <sup>9</sup>	76 241	69 383	1.65	3.19	134.4

Life business	Premium volume (in millions of USD)		Share of world market (in %)	Premiums <sup>1</sup> in % of GDP	Premiums <sup>1</sup> per capita (in USD)
	2012	2011			
<b>America</b>	<b>691 372</b>	<b>660 954</b>	<b>26.38</b>	<b>3.01</b>	<b>729.9</b>
North America	619 538	595 701	23.64	3.57	1 776.8
Latin America and Caribbean	71 834	65 253	2.74	1.28	120.0
<b>Europe</b>	<b>876 444</b>	<b>938 504</b>	<b>33.44</b>	<b>3.89</b>	<b>996.0</b>
Western Europe	855 829	917 811	32.65	4.58	1 612.3
Central and Eastern Europe	20 614	20 693	0.79	0.57	63.6
<b>Asia</b>	<b>957 712</b>	<b>918 478</b>	<b>36.54</b>	<b>4.09</b>	<b>2 298.8</b>
Advanced Asian markets	717 050	680 571	27.36	9.09	3 380.8
Emerging Asia <sup>2</sup>	230 764	227 926	8.80	1.85	63.6
Middle East and Central Asia	9 898	9 982	0.38	0.33	30.0
<b>Africa</b>	<b>49 888</b>	<b>47 007</b>	<b>1.90</b>	<b>2.53</b>	<b>46.7</b>
<b>Oceania</b>	<b>45 448</b>	<b>46 775</b>	<b>1.73</b>	<b>2.62</b>	<b>1 245.5</b>
<b>World<sup>3</sup></b>	<b>2 620 864</b>	<b>2 611 718</b>	<b>100.00</b>	<b>3.69</b>	<b>372.6</b>
Advanced markets <sup>4</sup>	2 242 323	2 245 934	85.56	4.98	2 132.8
Emerging markets <sup>5</sup>	378 540	365 785	14.44	1.39	62.9
OECD <sup>6</sup>	2 159 047	2 172 815	82.38	4.58	1 678.9
G7 <sup>7</sup>	1 698 858	1 705 067	64.82	5.05	2 266.8
Euroland	551 133	603 505	21.03	4.02	1 477.4
EU, 27 countries	821 156	882 678	31.33	4.58	1 506.0
NAFTA <sup>8</sup>	630 382	605 787	24.05	3.40	1 355.7
ASEAN <sup>9</sup>	46 599	42 651	1.78	2.10	88.4

Non-life business	Premium volume (in millions of USD)		Share of world market (in %)	Premiums <sup>1</sup> in % of GDP	Premiums <sup>1</sup> per capita (in USD)
	2012	2011			
<b>America</b>	<b>870 781</b>	<b>836 749</b>	<b>43.72</b>	<b>3.79</b>	<b>919.3</b>
North America	773 878	746 800	38.86	4.46	2 219.5
Latin America and Caribbean	96 903	89 949	4.87	1.72	161.9
<b>Europe</b>	<b>658 732</b>	<b>686 938</b>	<b>33.07</b>	<b>2.84</b>	<b>728.3</b>
Western Europe	606 888	635 961	30.47	3.14	1 104.0
Central and Eastern Europe	51 844	50 977	2.60	1.44	159.9
<b>Asia</b>	<b>388 511</b>	<b>360 307</b>	<b>19.51</b>	<b>1.64</b>	<b>91.9</b>
Advanced Asian markets	218 908	211 625	10.99	2.71	1 006.6
Emerging Asia <sup>2</sup>	138 600	118 890	6.96	1.11	38.2
Middle East and Central Asia	31 003	29 793	1.56	1.02	94.0
<b>Africa</b>	<b>22 002</b>	<b>22 267</b>	<b>1.10</b>	<b>1.12</b>	<b>20.6</b>
<b>Oceania</b>	<b>51 623</b>	<b>48 184</b>	<b>2.59</b>	<b>2.98</b>	<b>1 414.7</b>
<b>World<sup>3</sup></b>	<b>1 991 650</b>	<b>1 954 445</b>	<b>100.00</b>	<b>2.81</b>	<b>283.1</b>
Advanced markets <sup>4</sup>	1 647 512	1 639 867	82.72	3.61	1 544.5
Emerging markets <sup>5</sup>	344 138	314 578	17.28	1.26	57.2
OECD <sup>6</sup>	1 660 606	1 655 520	83.38	3.48	1 278.0
G7 <sup>7</sup>	1 278 673	1 267 483	64.20	3.66	1 643.3
Euroland	436 384	466 206	21.91	3.38	1 242.2
EU, 27 countries	581 137	612 184	29.18	3.12	1 027.5
NAFTA <sup>8</sup>	787 016	759 578	39.52	4.25	1 692.6
ASEAN <sup>9</sup>	29 642	26 732	1.49	1.09	46.0

Abbildung A.1: Prämienvolumen 2012 des globalen Versicherungssektors (oben), des Sektors Leben (mitte) und des Sektors Nicht-Leben (unten), Quelle: Swiss Re 2013.

**Einjährige Sterbewahrscheinlichkeiten  $q(x)$  und  
erwartete Restlebensdauer  $e(x)$  einer  $x$ -Jährigen Person**

x	Mann		Frau		x	Mann		Frau	
	q(x)	e(x)	q(x)	e(x)		q(x)	e(x)	q(x)	e(x)
0	0.003949	77.95	0.003151	83.25	50	0.003664	30.01	0.001969	34.46
1	0.000268	77.26	0.000192	82.51	51	0.004086	29.12	0.002159	33.52
2	0.000214	76.28	0.000153	81.53	52	0.004549	28.24	0.002362	32.60
3	0.000165	75.30	0.000119	80.54	53	0.005058	27.36	0.002583	31.67
4	0.000124	74.31	0.000094	79.55	54	0.005617	26.50	0.002827	30.75
5	0.000091	73.32	0.000080	78.56	55	0.006232	25.65	0.003102	29.84
6	0.000073	72.32	0.000072	77.57	56	0.006910	24.81	0.003412	28.93
7	0.000069	71.33	0.000069	76.57	57	0.007653	23.97	0.003755	28.03
8	0.000070	70.33	0.000069	75.58	58	0.008460	23.16	0.004132	27.13
9	0.000071	69.34	0.000070	74.58	59	0.009325	22.35	0.004546	26.24
10	0.000073	68.34	0.000073	73.59	60	0.010240	21.55	0.004993	25.36
11	0.000083	67.35	0.000078	72.59	61	0.011194	20.77	0.005463	24.48
12	0.000103	66.35	0.000088	71.60	62	0.012177	20.00	0.005949	23.61
13	0.000136	65.36	0.000103	70.60	63	0.013184	19.24	0.006453	22.75
14	0.000191	64.37	0.000123	69.61	64	0.014214	18.49	0.006976	21.90
15	0.000270	63.38	0.000148	68.62	65	0.015274	17.75	0.007521	21.05
16	0.000367	62.40	0.000173	67.63	66	0.016385	17.02	0.008094	20.20
17	0.000481	61.42	0.000193	66.64	67	0.017571	16.29	0.008712	19.36
18	0.000599	60.45	0.000209	65.65	68	0.018865	15.58	0.009402	18.53
19	0.000699	59.49	0.000226	64.67	69	0.020305	14.87	0.010191	17.70
20	0.000766	58.53	0.000241	63.68	70	0.021936	14.17	0.011114	16.88
21	0.000797	57.57	0.000250	62.70	71	0.023806	13.47	0.012210	16.06
22	0.000792	56.62	0.000252	61.71	72	0.025966	12.79	0.013524	15.25
23	0.000765	55.66	0.000248	60.73	73	0.028471	12.12	0.015107	14.46
24	0.000736	54.71	0.000244	59.74	74	0.031378	11.46	0.017015	13.67
25	0.000715	53.75	0.000244	58.76	75	0.034744	10.81	0.019309	12.90
26	0.000699	52.78	0.000248	57.77	76	0.038632	10.18	0.022056	12.14
27	0.000686	51.82	0.000254	56.79	77	0.043106	9.57	0.025325	11.41
28	0.000678	50.86	0.000262	55.80	78	0.048232	8.98	0.029189	10.69
29	0.000678	49.89	0.000272	54.82	79	0.054078	8.41	0.033728	10.00
30	0.000686	48.92	0.000283	53.83	80	0.060711	7.86	0.039020	9.33
31	0.000704	47.96	0.000298	52.85	81	0.068193	7.34	0.045146	8.69
32	0.000732	46.99	0.000316	51.86	82	0.076587	6.84	0.052187	8.07
33	0.000772	46.02	0.000337	50.88	83	0.085949	6.36	0.060222	7.49
34	0.000819	45.06	0.000363	49.89	84	0.096330	5.91	0.069324	6.94
35	0.000869	44.10	0.000395	48.91	85	0.107777	5.49	0.079559	6.42
36	0.000923	43.13	0.000430	47.93	86	0.120326	5.09	0.090987	5.93
37	0.000985	42.17	0.000468	46.95	87	0.134003	4.72	0.103654	5.47
38	0.001059	41.21	0.000510	45.97	88	0.148824	4.38	0.117592	5.05
39	0.001146	40.26	0.000557	45.00	89	0.164790	4.05	0.132815	4.65
40	0.001248	39.30	0.000617	44.02	90	0.181888	3.76	0.149319	4.29
41	0.001369	38.35	0.000694	43.05	91	0.200088	3.48	0.167075	3.95
42	0.001512	37.40	0.000788	42.08	92	0.219345	3.23	0.186035	3.64
43	0.001679	36.46	0.000899	41.11	93	0.239597	2.99	0.206123	3.36
44	0.001872	35.52	0.001022	40.15	94	0.260763	2.78	0.227240	3.11
45	0.002094	34.58	0.001157	39.19	95	0.282748	2.58	0.249266	2.87
46	0.002345	33.66	0.001302	38.23	96	0.305441	2.40	0.272056	2.66
47	0.002625	32.73	0.001456	37.28	97	0.328716	2.23	0.295448	2.47
48	0.002935	31.82	0.001619	36.34	98	0.352438	2.08	0.319265	2.29
49	0.003281	30.91	0.001790	35.39	99	0.376462	1.94	0.343318	2.14

**Tabelle A.2:** Sterbetafel für Österreich 2010/2012 (Quelle: Statistik Austria).

Verteilungsfunktion der Normalverteilung $\Phi(z)$										
$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabelle A.3: Verteilungsfunktion der Normalverteilung  $\Phi(z)$ .  $z =$  Hauptwert (links) + Verfeinerungswert (oben).





# Literaturverzeichnis

- [1] Andrew B. Abel, Ben Bernanke, and Dean Croushore. *Macroeconomics*. Prentice Hall, 8th edition, 2012.
- [2] Deutsche Börse AG. *Xetra: Marktmodell Aktien*. Release 14.0. Available at: [www.xetra.com](http://www.xetra.com), 2013.
- [3] George A. Akerlof. The market for lemons: Quality uncertainty and the market mechanism. *Quarterly Journal of Economics*, (84/3):488–500, 1970.
- [4] Hansjörg Albrecher, Andreas Binder, Volkmar Lautscham, and Philipp Mayer. *Introduction to Quantitative Methods for Financial Markets*. Birkhäuser, 2013.
- [5] AWS/WKO. *Banken und Versicherungen (in 5 Teilen)*. Arbeitsgemeinschaft Wirtschaft und Schule (AWS), [www.bwg.at](http://www.bwg.at)>Über uns>Financial Education (Stand 05/2014), 2010.
- [6] European Central Bank. *Guidelines of the European Central Bank on Monetary Policy Instruments and Procedures if the Eurosystem*. Available at [www.ecb.europa.eu](http://www.ecb.europa.eu), ecb/2011/14 edition, 2011.
- [7] European Central Bank. *The Monetary Policy of the ECB*. Available at [www.ecb.europa.eu](http://www.ecb.europa.eu), 2011.
- [8] European Central Bank. *The implementation of monetary policy in the euro area*. Available at [www.ecb.europa.eu](http://www.ecb.europa.eu), 2012.
- [9] Christian Bluhm, Ludger Overbeck, and Christoph Wagner. *Introduction to Credit Risk Modeling*. Chapman&Hall/CRC, 2nd edition, 2010.
- [10] N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, and C.J. Nesbitt. *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, 2nd edition, 1997.
- [11] A. Brauneis, D. Dornauer, and R. Mestel. Finanzwissen - allgemein verständlich: Zinsinstrumente. *Bankarchiv*, (1,2/2014), 2014.
- [12] A. Brauneis and R. Mestel. Finanzwissen - allgemein verständlich: Aktien. *Bankarchiv*, (4,5/2014), 2014.
- [13] A. Brauneis and R. Mestel. Finanzwissen - allgemein verständlich: Bedingte Termingeschäfte. *Bankarchiv*, (12/2014):894–902, 2014.
- [14] A. Brauneis and R. Mestel. Finanzwissen - allgemein verständlich: FX Kassainstrumente. *Bankarchiv*, (7/2014):472–477, 2014.

- [15] A. Brauneis and R. Mestel. Finanzwissen - allgemein verständlich: Unbedingte Termingeschäfte. *Bankarchiv*, (10/2014):804–812, 2014.
- [16] Richard Brealey, Stewart Myers, and Franklin Allen. *Principles of Corporate Finance*. McGraw-Hill, 11th edition, 2013.
- [17] CFA. *Economics CFA Program Curriculum Volume 2 Level 1 2011*. Pearson, 2013 edition, 2013.
- [18] D. Dornauer and R. Mestel. Funktionsweise und Einsatzmöglichkeiten von Swaps. *Bankarchiv*, (12/2013):533–542, 2013.
- [19] Attila Fenyves and Klaus G. Koban. *Österreichisches Versicherungsrecht*. LexisNexis Verlag, 4th edition, 2008.
- [20] Wolf Gamerith, Ulrike Leopold-Wildburger, and Werner Steindl. *Einführung in die Wirtschaftsmathematik*. Springer, 5th edition, 2010.
- [21] Hans U. Gerber. *Life Insurance Mathematics*. Springer, 3th edition, 1997.
- [22] H.U. Gerber. *Introduction to Mathematical Risk Theory*. Richard D. Irwin, 1979.
- [23] H. Gischer, L. Menkhoff, and B. Herz. *Geld, Kredit und Banken*. Springer, 4th edition, 2012.
- [24] T. Hartmann-Wendels, Andreas Pfingsten, and Martin Weber. *Bankbetriebslehre*. Springer, 6th edition, 2014.
- [25] John C. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall, 9th edition, 2014.
- [26] Erwin Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley, 10th edition, 2011.
- [27] Paul Krugman and Robin Wells. *Microeconomics*. Worth Publishers, 3th edition, 2012.
- [28] N. Gregory Mankiw. *Principles of Macroeconomics: International Edition*. South-Western Cengage Learning, 6th edition, 2011.
- [29] William A. McEachern. *Macroeconomics: a contemporary introduction*. South-Western Cengage Learning, 8th edition, 2009.
- [30] A. McNeill, R. Frey, and P. Embrechts. *Quantitative risk management*. Princeton University Press, 2005.
- [31] David Miles and Andrew Scott. *Macroeconomics: understanding the wealth of nations*. Wiley, 2005.
- [32] Tristan Nguyen and Frank Romeike. *Versicherungswirtschaftslehre*. Springer-Gabler, 2013.
- [33] National Bureau of Economic Research. *The Measurement and Behaviour of Unemployment*. NBER, [www.nber.org/chapters/c2644](http://www.nber.org/chapters/c2644), 1957.
- [34] Basel Committee on Banking Supervision. International convergence of capital measurement and capital standards. *Bank for International Settlement*, 2006.
- [35] International Labour Organization. *Global Employment Trends 2013*. 2013.

- [36] Robert Pindyck and Daniel Rubinfeld. *Microeconomics*. Pearson Series in Economics. Prentice Hall, 8th edition, 2012.
- [37] Swiss Re. Insurance investment in a challenging global environment. *Sigma*, (5/2010), 2010.
- [38] Swiss Re. *Sigma: World Insurance in 2012*. No. 3/2013. [www.swissre.com](http://www.swissre.com), 2013.
- [39] Ray Rees and Achim Wambach. *The Microeconomics of Insurance*. Foundations and Trends in Microeconomics. Now Publishers Inc, 2008.
- [40] H. M. Ross. *Introduction to Probability Models*. Academic Press, 9th edition, 2007.
- [41] Dominick Salvatore and Eugene Diulio. *Schaum's Outline of Principles of Economics*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill, 2nd edition, 2011.
- [42] Hanspeter K. Scheller. *The European central bank history, role and functions*. Available at [www.ecb.europa.eu](http://www.ecb.europa.eu), 2nd (überarbeitet) edition, 2006.
- [43] Henner Schierenbeck, Michael Lister, and Stefan Kirmße. *Ertragsorientiertes Bankmanagement*. Springer-Gabler, in 3 Bänden, 2014.
- [44] Kaplan Schweser. *2013 CFA® Level I Book 2 - Economics*. SchweserNotes for the CFA® Exam. 2012.
- [45] Moody's Investors Service. *Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2007*. [www.moodys.com](http://www.moodys.com), 2008.
- [46] Standard & Poor's Ratings Services. *Global Reinsurance Highlights 2013*. Financial. McGraw Hill, [www.standardandpoors.com](http://www.standardandpoors.com), 2013.
- [47] Martin Weber. *Unternehmens- und Gesellschaftsrecht - Eine Einführung*. Linde Verlag, 2nd edition, 2011.
- [48] Peter Zweifel and Roland Eisen. *Insurance Economics*. Springer, 2012.

# Stichwortverzeichnis

- Ableitung, 43, 44
  - Kettenregel, 45
  - Regeln, 45
  - Summenregel, 45
- Adverse Selektion, 172
- Aktie, 123
  - IPO, 124
- Aktiengesellschaft, 183
- Anleihe, 125
  - ABS, 125
  - Duration, 129
  - ILS, 125
  - Kupon, 125
  - Mantel, 125
  - Staatsanleihe, 126
- Approximation, 47
- Asymmetrische Information, 172
  - Marktversagen, 173
- Bank, 153
  - Bankbilanz, 156
- Bankwesengesetz (BWG), 186
- Barter economy, 101
- Basel II, 157
- Basis, 35
- Bilanz
  - Bankbilanz, 156
  - Versicherungsbilanz, 165
- Binomialkoeffizient, 66
- Binomialtheorem, 66
- Bruchzahl, 28
  - Doppelbruch, 28
- Budget, 100
  - Budget deficit, 100
  - Budget surplus, 100
- Central banks, 100
- Combined Ratio, 170
- Concentration measure, 89
- Consumer surplus, 84
- Cycle
  - business, 97
  - economic, 97
- Deflation, 93
- Demand, 80
  - Excess demand, 83
- Derivate, 131
- Dichtefunktion, 70
- Differential, 48
- Differentialquotient, 43
- Differenzenquotient, 42
- Diskontierungsfaktor, 31
- Dividenden, 123
- Duration, 129
- Economic growth, 95
- Economies of scale, 89
- Economies of scope, 89
- Einlagengeschäft, 115
- Einlagensicherung, 116
- Elasticity of demand
  - Cross-price elasticity, 87
  - Income elasticity, 87
  - Price elasticity, 85
- Elasticity of supply
  - Price elasticity, 86
- Elementarereignis, 55
- Equilibrium, 82
  - stable, 83
- Ereignis, 56
  - sicheres, 57
  - unmögliches, 57
- Erwartungswert, 71
- Eulersche Zahl, 36
- EURIBOR, 106
- Euro
  - Eurozone, 104

- European Central Bank (ECB), 104
- Expansion, 97
- Experiment, 55
- Exponent, 35
- Exponentialfunktion, 35
  - Rechenregeln, 38
- Extremwerte, 47
- Finanzintermediär, 154
- Firma, 181
- Firmenbuch, 181
- Fiscal policy, 100
- Forward, 130
- Forward-Rate Agreement (FRA), 132
- Funktion, 33, 49
  - Ableitung, 43, 44
    - Kettenregel, 45
    - Regeln, 45
    - Summenregel, 45
  - Betrags-, 33
  - Definitionsmenge, 33
  - Exponential-, 35
  - Extremwert, 47
  - Funktionswert, 41
  - Integral
    - Summenregel, 49
  - konstante, 33
  - Krümmung, 46
  - lineare, 33
  - Logarithmus-, 37
  - Maximum
    - globales, 46
    - lokales, 46
  - Minimum
    - globales, 46
    - lokales, 46
  - Monotonie, 46
  - Nullstelle, 41
  - Polynoms-, 35
  - quadratische, 33
  - Sattelpunkt, 46
  - Stammfunktion, 49
  - Umkehr-, 36
  - verkettete, 33
- GDP (gross domestic product), 90
  - nominal, 91
- Geldmarkt, 122
- Gerade, 34
  - Steigung einer, 34
- Gesellschaft mit beschränkter Haftung (GmbH), 182
- Gini index, 96
- Gleichung
  - lineare, 40
  - quadratische, 32
- Gleichungssystem
  - Lösungsvektor, 51
  - lineares  $3 \times 3$ , 53
  - lineares,  $2 \times 2$ , 51
  - lineares, Koeffizienten, 51
  - lineares, Matrixform, 54
  - obere Dreiecksform, 52
  - Zeilen-Stufen-Form, 52
- Graph
  - $x - y$ -Ebene, 33
  - Koordinatensystem, 34
  - Ursprung, 33
- Grenzwert, 36
- Grundraum, 55
- Herfindahl-Hirschman Index (HHI), 90
- Indicators, 98
  - coincident, 98
  - lagging, 98
  - leading, 98
- Inflation, 93
  - Hyperinflation, 93
  - Inflation rate, 102
- Insolvenz, 184
  - Insolvenzordnung, 184
  - Konkurs, 185
  - Sanierungsverfahren, 185
- Insurance-linked Securities, 169
- Integral
  - als Fläche, 48
  - Hauptsatz, 49
  - Integrationsregeln, 49
  - partielle Integration, 50

- Riemann'sches, 48
- Summenregel, 49
- unbestimmtes, 49
- Kapitalgesellschaften, 183
- Kapitalmarkt, 122
- Koeffizient, 34
- Kommanditgesellschaft (KG), 182
- Kommanditist, 182
- Konkurs, 185
- Korrelationskoeffizient, 64
- Kostenquote, 170
- Kovarianz, 64
- Krümmung, 46
- Kreditinstitut, 153
- Kreditrisiko, 119, 155
- Lösungsmenge, 41
- Lack-of-Memory, 73
- Leistungsquote, 170
- LIBOR, 106
- Limes, 36, 44
- Liquiditätsrisiko, 156
- Logarithmusfunktion, 37
  - Logarithmstabelle, 38
  - Rechenregeln, 38
- Marktrisiko, 155
- Marktzinssatz, 127
- Matrix, 54
  - Addition, 54
  - Einheitsmatrix, 55
  - Inverse Matrix, 55
  - Multiplikation, 54
- Maximum
  - globales, 46
  - lokales, 46
- Menge
  - disjunkt, 58
  - diskrete, 27
  - leere, 41
  - stetige, 27
- Minimum
  - globales, 46
  - lokales, 46
- Monotonie, 46
- Nullstelle, 41
- Offene Gesellschaft (OG), 182
- Option, 133
- Ordinary goods, 80
- Personengesellschaften, 183
- Polynom, 35
- Potenz
  - $n$ -te, 29
- Prämie
  - Prämienprinzip, 138
  - reine Risikoprämie, 138
- Primärmarkt, 123
- Pro rata, 106
- Producer surplus, 84
- Prokura, 181
- Rückversicherung, 168
- Ratingagentur, 120
- Rechtsordnung, 177
- Reihe
  - arithmetische, Summenformel, 30
  - arithmetische, 30
  - endliche, 29
  - geometrische, 30
  - geometrische, Summenformel, 31
  - unendliche geometrische, 31
- Risiko
  - Kredit-, 155
  - Liquiditäts-, 156
  - Markt-, 155
  - operationelles, 156
- Sanierungsverfahren, 185
- Sattelpunkt, 46
- Satz von Bayes, 60
- Special Purpose Vehicle (SPV), 160
- Spotmarkt, 130
- Staatsanleihe, 126
- Steigung
  - der Sekante, 43
  - der Tnagente, 46
- Sterbetafel, 144
- Sterbewahrscheinlichkeit, 144
- Stetigkeit, 36

- Summe zweier Funktionen, 37
- Unstetigkeitsstelle, 36
- Summenschreibweise,  $\Sigma$ , 35
- Supply, 81
  - Excess Supply, 82
- Tax
  - direct, 108
- Terminmarkt, 130
- Transfer payments, 100
- Umkehrfunktion, 36
- Value-at-Risk, 163
- Varianz, 64, 71
- Vektor, 54
  - Skalarprodukt, 54
- Verbriefung, 159, 169
- Versicherung, 161
  - Individualversicherung, 135
  - Sozialversicherung, 135
  - Versicherer, 161
  - Versicherungsbilanz, 165
  - Versicherungsvertrag, 136
- Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG), 188
- Versicherungsvertragsgesetz (VersVG), 188
- Verteilung
  - Bernoulli-, 65
  - Binomial-, 65
  - Dichtefunktion, 70
  - Exponential-, 72
  - Gleich-, 71
  - Normal-, 74
  - stetige, 69
  - Verteilungsfunktion, 62
- Wahrscheinlichkeit
  - Elementarereignis, 55
  - Ereignis, 56
  - Gegenwahrscheinlichkeit, 58
  - Grundraum, 55
  - Laplace-, 58
  - Satz von Bayes, 60
  - Verteilungsfunktion, 62
  - Wahrscheinlichkeitsfunktion, 61
- Yield, 127
- Zahlen
  - ganze, 28
  - natürliche, 28
  - reelle, 28
- Zero-Rate, 128
- Zins
  - äquivalenter stetiger Zinssatz, 39
  - effektiver Zinssatz, 39
  - nomineller Zinssatz, 38
  - stetige Verzinsung, 39
  - Verzinsungsperioden, 39
  - Zinseszinsseffekt, 38
- Zinsberechnungsmethode, 118
- Zufallsvariable
  - Dichtefunktion, 70
  - diskrete, 62
  - Erwartungswert, 63, 71
  - stetige, 62, 69
  - Varianz, 64, 71